ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 14 AVRIL 1947.

PRÉSIDENCE DE M. Louis BLARINGHEM.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le Secrétaire perpétuel dépose sur le Bureau de l'Académie l'*Annuaire pour l'an* 1947, publié par le Bureau des Longitudes.

THÉORIE DES ENSEMBLES. — *L'ordination des ensembles.* Note (¹) de M. Arnaud Denjoy.

Voici quatre propositions bien souvent formulées :

I. *La puissance d'un ensemble infini est égale à son double*, c'est-à-dire : la réunion de deux ensembles de même puissance possède encore cette puissance.

II. *La puissance d'un ensemble infini est égale à son carré*, c'est-à-dire : l'ensemble des couples d'éléments empruntés à un même ensemble infini possède encore la puissance de celui-ci (une famille dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, la puissance de l'ensemble des points d'un carré est égale à celle du continu linéaire, . . .).

III. *La puissance immédiatement consécutive à une puissance infinie* ϖ est 2^{ϖ}, ceci désignant la puissance de l'ensemble des fonctions prenant indifféremment les valeurs 0 et 1 aux points d'un ensemble de puissance ϖ.

IV. *Tout ensemble peut être bien ordonné* (Zermelo).

Aucun de ces énoncés n'a trouvé une démonstration satisfaisante.

On peut sans hésitation souscrire aux deux premiers. Les deux derniers suscitent des réserves. A l'égard de ces théorèmes hypothétiques, l'attitude des analystes est diverse.

Pour les uns, les objets possédant une véritable existence mathématique forment un ensemble dénombrable; M. E. Borel en arrive même à dire : un ensemble fini. Les quatre propositions, entendues dans toute leur généralité, sont de ce point de vue à peu près vides de sens.

Pour d'autres, au contraire, le transfini de toute classe, avec les conséquences

---

(¹) Séance du 9 avril 1947.

à tirer de son emploi, particulièrement les quatre affirmations ci-dessus rappelées, tout cela est d'une réalité aussi assurée que n'importe quelle notion de l'Analyse la plus classique.

Nous admettons quant à nous l'existence solidaire de tous les nombres réels et de tous les nombres ordinaux de la classe II, mais nous regardons celle-ci comme inconcevable en tant qu'ensemble bien ordonné. Les nombres ordinaux à partir de la troisième classe sont pour nous purement fictifs, inexistants. Par contre, nous croyons indémontrable la fausseté d'une quelconque des quatre propositions données plus haut, et nous pensons que toute conception, toute allégation qui seraient contredites par un résultat tiré de l'une au moins de ces quatre propositions, doivent être tenues pour erronées. Voici deux applications de cette idée.

Énoncé inexact. — *Il est faux que l'ensemble* I *des ordinations possibles d'un ensemble infini* E *ait une puissance égale à celle de l'ensemble* H *des fonctions prenant sur* H *les deux seules valeurs* o *et* 1.

Adoptons la notation de Cantor $\overline{\overline{E}}$ pour désigner la puissance de E. Nous allons montrer successivement, en nous appuyant sur les propositions I et II, $\overline{\overline{I}} \geqq \overline{\overline{H}}$, puis $\overline{\overline{I}} \leqq \overline{\overline{H}}$.

Soit $(\mathfrak{O})$ une ordination particulière de E. A chaque élément a de E adjoignons-en un second, que nous appelons $a + i$.

En vertu de la proposition I, si l'ensemble E′ est la réunion des a et des $(a+i)$, $\overline{\overline{E'}} = \overline{\overline{E}}$. Les ordinations de E et de E′ se correspondent chacune à chacune. Si I′ est l'ensemble des secondes, $\overline{\overline{I'}} = \overline{\overline{I}}$. Soit $\varphi(a)$ une fonction de H.

Considérons l'ordination $(\mathfrak{O}', \varphi)$ de E′ ainsi définie : Si α et β sont dans E′, mais appartiennent à deux couples différents, $(a, a+i)$ contenant α, $(b, b+i)$ contenant β, l'inégalité ordinale de α et de β dans (O', φ) est, par définition, de même sens que celle de a et b dans $(\mathfrak{O})$. Si $\alpha = a$, $\beta = a + i$, on posera $\alpha \prec \beta$ si $\varphi(a) = 0$, $\alpha \succ \beta$ si $\varphi(a) = 1$. A deux fonctions φ, φ' différentes correspondent deux ordinations $(\mathfrak{O}', \varphi)$, $(\mathfrak{O}', \varphi')$ de E′ différentes. Donc $\overline{\overline{I'}} \geqq \overline{\overline{H}}$ et $\overline{\overline{I}} \geqq \overline{\overline{H}}$.

Considérons l'ensemble K des couples $c = (a, b)$ formés de deux éléments quelconques a, b de E. D'après la proposition II, $\overline{\overline{K}} = \overline{\overline{E}}$. Donc les fonctions ψ égales à o ou à 1 sur K correspondent chacune à chacune aux fonctions φ égales à o ou à 1 sur E. Si L est l'ensemble des ψ, $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{H}}$. Or, soit $(\mathfrak{O})$ une ordination quelconque de E, donc un élément de I. Pour l'élément $c = (a, b)$ de K, quand $a \neq b$, faisons $\psi(c) = 0$ si $a \prec b$ selon $(\mathfrak{O})$ et $\psi(c) = 1$ si $a \succ b$ dans $(\mathfrak{O})$. Pour $c = (a, a)$ faisons $\psi(c) = 0$. A tout élément $(\mathfrak{O})$ de I correspond un élément ψ de L. A deux éléments $(\mathfrak{O}_1)$, $(\mathfrak{O}_2)$ de I distincts correspondent deux éléments ψ_1, ψ_2 distincts dans L. Donc $\overline{\overline{I}} \leqq \overline{\overline{L}}$, $\overline{\overline{I}} \leqq \overline{\overline{H}}$.

Énoncé inexact. — *Il est faux qu'il soit impossible d'ordonner un ensemble infini* E *de manière que l'ensemble de ses sections finissantes ait une puissance supérieure à celle de* E.

D'après la proposition IV, E peut être bien ordonné. Soient $\varpi_\lambda = \overline{\overline{E}}$, (O) la suite cantorienne des nombres ordinaux, S(β, O) le segment du nombre β dans (O), ω_λ le plus petit nombre dont le segment a la puissance ϖ_λ, de sorte que, si $\beta < \omega_\lambda$, $\overline{\overline{S(\beta, O)}} < \varpi_\lambda$.

Pour chaque segment S(β, O) (ci-après $\beta < \omega_\lambda$) formons l'ensemble M_β des suites σ_β composées uniquement de nombres 0 et 1, ordonnées semblablement à S(β, O), et non terminées par un zéro ni par une file indéfinie de zéros. Soit $M = \Sigma M_\beta$. Ordonnons M par la règle alphabétique, en ce sens que, σ_β et σ_γ étant deux suites distinctes quelconques appartenant à M, et δ le rang du premier chiffre non commun aux deux : ou bien $\delta < \beta$ et $\delta < \gamma$, et alors le $\delta^{\text{ième}}$ chiffre étant 0 dans l'une des suites, 1 dans l'autre, celle-là sera regardée comme antérieure à celle-ci; ou bien δ = soit β, soit γ, et si, par exemple $\delta = \gamma$, σ_β est un segment de σ_γ, σ_β sera regardée comme antérieure à σ_γ.

Je dis que $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{E}}$. En effet, pour β déterminé, $\overline{\overline{M_\beta}} = 2^\chi$, si $\chi = \overline{\overline{S(\beta, O)}}$. Mais 2^χ (fini avec χ) est, pour χ infini, la puissance immédiatement supérieure à χ (proposition III). D'après $\chi < \varpi_\lambda$, $2^\chi \leqq \varpi_\lambda$; $M = \Sigma M_\beta$ est la réunion, de puissance $\varpi_\lambda = \overline{\overline{S(\omega_\lambda, O)}}$, d'ensembles M_β de puissance au plus égale à ϖ_λ. D'après la proposition II, $M = \varpi_\lambda$. Donc E, ayant même puissance que M, peut être ordonné comme M.

Or, chaque suite Σ de type $S(\omega_\lambda, O)$ composée uniquement de chiffres 0 et 1 (non tous égaux à 0 à partir d'un certain rang) partage M en deux sections, l'une commençante S(Σ, M), l'autre finissante S′(Σ, M), formées respectivement des suites σ antérieures et des suites σ ultérieures, alphabétiquement, à Σ. Deux suites Σ, Σ′ différentes, donc présentant pour un premier rang $\beta < \omega_\lambda$ deux chiffres différents, sont séparées par une infinité (de puissance ϖ_λ) de suites σ de M. Donc à deux suites Σ, Σ′ distinctes correspondent deux sections finissantes S′(Σ, M), S′(Σ′, M) (et aussi deux sections commençantes) distinctes. L'ensemble des sections finissantes de E ordonné semblablement à M a donc la puissance $2^{\varpi_\lambda} = \varpi_{\lambda+1} > \overline{\overline{E}}$.

Par exemple, si E est dénombrable, on se trouve considérer les fractions dyadiques $(2h-1)/2^n$ $(h = 1, 2, \ldots, 2^n)$, ordonnées entre elles dans le sens de la croissance, et dont l'ensemble, dénombrable, admet l'infinité continue de sections commençantes bornées inférieurement par un nombre irrationnel ou par un nombre rationnel dyadique.

GÉODÉSIE. — *Sur le calcul des corrections de réfraction géodésique.* Note de M. Ernest Esclangon.

La détermination, en géodésie, de l'effet de réfraction atmosphérique comporte, dans les mesures de hauteurs angulaires, de grandes difficultés, en raison du fait que les rayons lumineux, faisant l'objet des visées optiques, cheminent uniquement dans la basse atmosphère, laquelle est le siège d'irrégu-

larités de toutes sortes. C'est une des principales causes d'imprécision dans la détermination trigonométrique des altitudes.

Malgré leur relative incertitude, tenant à ces irrégularités même, il reste indispensable, en géodésie, d'effectuer des corrections de réfraction dans les mesures de distances zénitales. On ne peut évidemment y parvenir qu'en basant le calcul sur l'hypothèse de couches atmosphériques concentriques, centrées sur le centre de la Terre, hypothèse répondant à des conditions moyennes, mais avec des écarts éventuels très importants.

Soit A une station d'observation, d'où l'on vise un autre point B, sous la distance zénitale apparente ζ_0. Le rayon lumineux allant de B à A suit un chemin courbe. L'angle v des tangentes AT, BT′ en A et B au rayon, constitue la *réfraction géodésique*, c'est-à-dire la déviation de la direction du rayon lumineux entre B et A. Lorsque le point B est à l'infini, l'angle v représente alors la *réfraction astronomique*.

Ce qui intéresse le géodésien, c'est non pas l'angle v, mais l'angle u que fait la direction de la droite AB avec la tangente AT en A qui définit la direction de visée; l'angle u représente en effet la correction à effectuer sur la distance zénitale apparente mesurée, pour obtenir la direction géométrique AB telle qu'elle serait observée s'il n'y avait pas d'atmosphère. Si le point B est à l'infini (cas de l'observation des astres), u et v se confondent avec la réfraction astronomique R, correspondant à la distance zénitale ζ_0.

Or, l'angle v est assez facilement calculable. J'ai montré ([1]) qu'une méthode simple était la suivante. Si l'on appelle n_0 et n les indices de réfraction aux points A et B, r_0 le rayon terrestre (au point A), μ un coefficient numérique déterminé ([2]), ζ_0 la distance zénitale apparente en A (angle de AT avec la verticale), on pouvait écrire

$$v = 2\mu n_0 r_0 \sin\zeta_0[(n_0-1)\psi(t_0)-(n-1)\psi(t)], \qquad (1)$$

où $\psi(t)$ désigne la fonction bien connue, traduite en tables ([3]),

$$\psi(t) = e^{t^2}\int_t^{+\infty} e^{-t^2}\,dt, \qquad (2)$$

avec, ici,

$$t_0 = \mu n_0 r_0 \cos\zeta_0, \qquad t = \pm\sqrt{t_0^2 + \mathrm{L}\,\frac{n_0-1}{n-1}}. \qquad (3)$$

La formule est valable pour toutes les distances zénitales, même supérieures à 90°; le signe à prendre devant le radical étant le signe + ou — suivant, qu'en B (dans le sens AB), le rayon s'éloigne ou se rapproche du centre de la

---

([1]) *Comptes rendus*, **216**, 1943, pp. 100 et 137.

([2]) Le coefficient μ est voisin de 1/310, r_0 étant exprimé en kilomètres.

([3]) Notamment par Radau, *Annales de l'Observatoire de Paris*, **18**, 1885 (Mémoires).

Terre. Le calcul de l'angle v est donc aisé. En faisant $n=1$, on obtient la *réfraction astronomique*.

Pour le calcul de l'angle u, correction de *réfraction géodésique*, remarquons que si l'on appelle i l'angle en B, de la tangente BT' avec le rayon vecteur $BC=r$ joignant B au centre C de la Terre, la distance de celui-ci à la tangente BT' est égale à $r\sin i=(nr\sin i)/n$ et, d'après la relation fondamentale, vérifiée en tout point du rayon lumineux, $nr\sin i=\text{const.}=n_0r_0\sin\zeta_0$, on voit que cette distance est égale à $(n_0r_0\sin\zeta_0)/n$. Elle est donc connue si l'on connaît l'indice n en B. L'angle v étant connu, la tangente BT' est ainsi déterminée en position. La distance Δ du point A, à cette même tangente (en B), devient également connue, égale à

$$\Delta=\frac{r_0}{n}\left(n_0\sin\zeta_0-n\sin(\zeta_0+v)\right). \tag{4}$$

Or, l'angle $v-u$ est l'angle des deux droites BT' et BA. Si l'on appelle D *la distance* des points A et B, on a donc

$$\sin(v-u)=\frac{\Delta}{D}, \tag{5}$$

ou, comme l'angle $v-u$ est très petit,

$$u=v-\frac{\Delta}{D}. \tag{6}$$

Ce qui, par une formule rigoureuse, détermine u, *correction de réfraction géodésique*, si, comme il arrive généralement en géodésie, la distance D des points A et B est très approximativement connue. Aux courtes distances, l'angle u est d'ailleurs sensiblement égal à $v/2$, ce qui revient à confondre, au voisinage de A, la trajectoire avec son cercle osculateur dont le rayon est de l'ordre de $30\,000\sin\zeta_0$/km.

La distance Δ est habituellement très petite; l'expression (4), toujours positive, ne dépassant en aucun cas 2^{km}. Dans le cas des observations géodésiques, sa valeur est facilement obtenue avec précision, surtout si l'on a pu déterminer directement l'indice n en B, au moyen des données météorologiques recueillies en ce point. Comme (ζ_0+v) n'est jamais ici très éloigné de 90°, une légère erreur sur v reste sans influence.

Théoriquement, la distance $D=AB$ pourrait être obtenue en fonction de v, mais son expression, au moyen de cette variable, est très compliquée; serait-elle simple, d'ailleurs, que la connaissance de D par voie géodésique reste beaucoup plus sûre parce que indépendante de toute liaison avec la trajectoire atmosphérique.

Si l'on posait $\theta=\operatorname{tg}v$, les coordonnées x et y d'un point quelconque de la trajectoire lumineuse, dans un système d'axes ayant le point A comme origine (l'axe Ax étant la tangente AT par exemple), se mettraient sous la forme

$$x=F'(\theta),\qquad y=\theta F'(\theta)-F(\theta), \tag{7}$$

d'où

(8) $$\operatorname{tg} u = \frac{y}{x} = \theta - \frac{F(\theta)}{F'(\theta)} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v - \frac{F(\theta)}{F'(\theta)}.$$

La fonction de $\operatorname{tg} v$, $F(\theta)/F'(\theta)$, égale à zéro pour $v = 0$ et $v = R$ (réfraction astronomique), peut se prêter à divers développements en série.

Mais la formation de la fonction $F(\theta)$ est extrêmement compliquée. Toutefois, par voie en quelque sorte empirique, on peut, par cette méthode, exprimer la correction u de réfraction géodésique sous la forme

(9) $$\frac{u}{R} = \frac{1}{2}\frac{v}{R} - \alpha\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \beta\left(\frac{v}{R}\right)^3 - \gamma\left(\frac{v}{R}\right)^4 + \ldots,$$

série convergente si v/R reste inférieur à $1/3$ pour $\zeta_0 = 90°$, l'étendue de la convergence augmentant d'ailleurs avec la hauteur apparente angulaire; α, β, γ sont des coefficients numériques dépendants de ζ_0, mais indépendants des facteurs météorologiques, c'est-à-dire de $(n_0 - 1)$; R désigne la réfraction astronomique correspondant à la distance zénithale ζ_0, de sorte que

(10) $$\frac{v}{R} = 1 - \frac{n-1}{n_0-1}\,\frac{\psi(t)}{\psi(t_0)},$$

t et t_0 étant définis par les expressions (3); la valeur de R elle-même, figurant au premier membre de (9), pouvant être prise directement dans les tables des réfractions astronomiques.

Les valeurs des coefficients α, β, γ seraient approximativement données par le tableau suivant :

ζ_0 (° ′).	α.	β.	γ.	ζ_0 (° ′).	α.	β.	γ.
91........	0,352	0,97	0,79	87.30.....	0,211	0,52	0,45
90.30.....	0,314	0,84	0,69	87........	0,204	0,50	0,43
90........	0,285	0,74	0,61	86.30.....	0,199	0,48	0,42
89.30.....	0,264	0,67	0,56	86........	0,195	0,47	0,41
89........	0,247	0,62	0,52	85.30.....	0,191	0,46	0,41
88.30.....	0,232	0,57	0,49	85........	0,187	0,45	0,40
88........	0,220	0,54	0,47	84.30.....	0,184	0,44	0,40

GÉODÉSIE — *Déterminations de la pesanteur dans le Nord-Est et le Centre de la France.* Note de **M. Pierre Lejay.**

Le tableau suivant donne les valeurs de la pesanteur obtenues en 1945 et une partie des valeurs obtenues en 1946, à l'aide des gravimètres Holweck-Lejay nos 622 et 42. Les valeurs sont déduites des formules d'étalonnage précédemment utilisées, en adoptant pour base : Paris (Observatoire), $g = 980{,}944$. Au cours des campagnes, plusieurs rattachements avec le réseau de la France sud ont été tentés. D'après ces nouvelles liaisons, il semble que la valeur adoptée provisoirement pour Lyon ($g = 980{,}615$), valeur qui a servi de base pour nos campagnes 1941 à 1944, soit trop faible de 4 milligals. L'homogénéité du réseau devra être rétablie par une étude ultérieure des valeurs de base.

Station.	Longitude Est Greenwich.	Lat.	Alt.	Date.	g.	g_0.	g''_0.	γ'_0.	$g_0 - \gamma'_0$.	$g''_0 - \gamma'_0$.
	° ′	° ′	mètres	1945	gals	gals	gals	gals	mgals	mgals
Le Châtelard	–	–		18 avril	980,622	–	–	–	–	–
Le Creusot	2.37,7	46.48,4	387	13 »	,693	980,813	980,769	980,792	+20	—23
Fontainebleau	2.41,8	48.24,1	77	16 »	,899	,923	,914	,936	—13	—22
Paris	–	–	–	25 »	,944	–	–	–	–	–
Bagneux	2.18,9	48.48,4	85	1er juin	,933	,960	,949	,972	—12	—22
Merlemont	2.10,2	49.23,5	97	3 »	,989	981,019	981,008	981,024	— 5	—16
Bagneux	–	–	–	15 »	,933	–	–	–	–	–
Œuilly	3.41,6	49.23,3	50	13 juill.	,996	981,011	,006	,024	—12	—18
Asfeld	4. 6,1	49.28,7	62	13 »	981,010	,044	,032	,033	+11	— 1
Rumigny	4.16,1	49.48,6	197	16 »	,021	,082	,059	,062	+20	— 2
Sévigny-la-Forêt	4.28,0	49.53,3	351	16 »	980,993	,104	,061	,069	+35	— 8
Lalobbe	4.22,6	49.39,7	119	17 »	981,016	,053	,040	,048	+ 4	— 8
Poix-Terron	4.38,9	49.39,2	185	18 »	,002	,059	,038	,048	+11	— 9
Aiglemont	4.46,0	49.47,0	267	19 »	,002	,084	,054	,059	+25	— 5
Thilay	4.48,5	49.52,5	172	19 »	,023	,076	,056	,067	+ 8	—11
Charleville	4.43,5	49.46,4	148	19 »	,025	,070	,054	,058	+12	— 4
Douzy	5. 2,7	49.40,2	166	20 »	,012	,063	,045	,049	+14	— 4
Montmédy	5.21,6	49.31,1	283	20 »	980,968	,056	,024	,035	+20	—11
Laneuville	5. 9,8	49.29,6	173	20 »	,989	,042	,023	,033	+ 9	—10
Buzancy	4.57,4	49.25,7	184	20 »	,971	,027	,007	,027	0	—20
Vouziers	4.42,4	49.23,8	111	20 »	,985	,019	,006	,025	— 5	—18
Louvergny	4.44,1	49.33,1	240	20 »	,977	,051	,024	,038	+12	—14
Lalobbe	4.22,6	49.39,7	120	21 »	981,017	,054	,040	,048	+ 5	— 8
Rethel	4.22,0	49.30,5	74	23 »	,009	,032	,023	,035	— 3	—11
Pont-Faverger	4.19,7	49.18,1	95	23 »	980,981	,010	,000	,016	— 6	—16
Auberive	4.25,1	49.12,0	118	23 »	,967	,004	980,990	,007	— 3	—17
Les-Grandes-Loges	4.17,6	49. 3,9	102	23 »	,955	980,986	,975	980,995	— 9	—20
Reims	4. 2,1	49.15,3	93	24 »	,975	981,004	,993	981,012	— 8	—19
Épernay	3.57,6	49. 2,8	74	24 »	,956	980,979	,971	980,993	—14	—22
Mareuil-en-Brie	3.45,2	48.57,6	215	24 »	,918	,985	,960	,986	— 1	—25
Montmirail	3.32,3	48.52,2	187	24 »	,924	,982	,961	,978	+ 4	—17
Rebais	3.14,0	48.50,9	149	24 »	,929	,975	,958	,976	— 0	—17
Couilly	2.51,7	48.53,1	61	24 »	,941	,960	,953	,979	—19	—26
Bagneux	–	–	–	26 »	,933	–	–	–	–	–
Charny	3. 5,7	47.52,7	139	12 août	,839	,882	,866	,889	+ 6	—22
Courson	3.30,0	47.36,8	224	12 »	,797	,866	,841	,865	+ 1	+23
Corbigny	3.41,6	47.15,5	202	12 »	,754	,817	,794	,833	—16	—39
Le Creusot	2.37,7	46.48,4	387	13 »	,695	,815	,771	,792	+22	—21
St-Gengoux	4.39,9	46.36,9	237	14 »	,710	,783	,756	,775	+ 8	—18
Le Châtelard	–	–	–	17 »	,622	–	–	–	–	–
Bagneux	–	–	–	20 sept.	,933	–	–	–	–	–
Paris	–	–	–	21 »	,944	–	–	–	–	–
Mareuil-sur-Ourcq	3. 4,9	49. 8,3	61	25 »	,968	,987	,980	981,001	—14	—21
Soissons	3.19,6	49.22,6	58	25 »	,992	981,010	981,003	,023	—13	—19
				1946.						
*Bagneux	–	–	–	21 juin	,932	–	–	–	–	–
Mondésir	2. 6,7	48.22,4	149	24 »	,875	,921	,904	,933	—12	—29
Chateau-Gaillard	1.54,2	48. 8,5	135	24 »	,857	,899	,884	,912	—13	—28
Orléans	1.54,6	47.54,2	112	24 »	,840	,874	,862	,891	+16	—29
Beaugency	1.38,2	47.46,7	94	24 »	,830	,859	,849	,880	—20	—31
Blois	1.19,8	47.35,2	94	25 »	,820	,849	,838	,862	—13	—24
Chenonceaux	1. 4,0	47.19,8	61	25 »	,814	,833	,826	,839	— 6	—13
Selles	1.33,6	47.16,3	78	25 »	,805	,829	,821	,834	— 4	—13
Vaudres	1.36,4	47. 2,6	190	26 »	,740	,799	,777	,813	—14	—36
Châteauroux	1.41,1	46.48,8	144	26 »	,753	,791	,781	,793	— 1	—12
Leboursin	1.49,3	46. 6,3	115	26 »	,770	,805	,792	,819	—13	—26

* Les stations marquées d'un astérisque ont été occupées deux fois.

** Pilier à 4m plus haut que le pilier précédemment utilisé.

Station.	Longitude Est Greenwich.	Lat.	Alt.	Date.	g.	g_0.	g''_0.	γ'_0.	$g_0-\gamma'_0$.	g''_0-
	° ′	° ′	mètres	1945	gals	gals	gals	gals	mgals	m
Millançay	1.46,7	46.27,1	102	26 »	980,808	981,840	981,828	980,850	—10	—2
La Motte-Breuvon	2. 2,2	46,36,1	117	27 »	,819	,855	,842	,864	— 8	—2
Aubigny	2.26,9	46.29,4	188	27 »	,794	,852	,830	,854	— 2	—2
Dampierre	2.31,1	46.45,7	143	27 »	,832	,876	,860	,878	— 2	—1
Montargis	2.44,1	48. 0,1	84	27 »	,859	,883	,876	,900	—16	—2
Châteauneuf	2.13,2	47.51,8	120	28 »	,842	,879	,865	,887	— 8	—2
Chambon-la-Forêt	2.15,6	48. 1,5	136	28 »	,850	,892	,877	,902	— 9	—2
Pithiviers	2.15,4	48.10,0	102	28 »	,869	,900	,889	,914	—14	—2
Malesherbes	2.24,4	48.17,4	112	28 »	,881	,915	,903	,926	—10	—2
Bagneux	–	–	–	1er juill.	,932	–	–	–	–	–
Mareuil-en-Dole	3.33,4	49.14,7	133	2 »	,964	981,005	,990	981,011	— 6	—2
Clairfontaine	3.58,6	49.57,8	227	2 »	981,020	,090	981,064	,075	+14	—1
Guise	3.38,0	49.53,9	99	2 »	,039	,070	,058	,070	0	—1
St-Quentin	3.17,6	49.50,9	102	2 »	,030	,061	,050	,065	— 3	—1
Ham	3. 4,4	49.45,1	64	2 »	,030	,050	,043	,056	— 6	—1
Noyon	3. 0,1	49.34,9	48	2 »	,023	,038	,033	,041	— 3	—
Bagneux	–	–	–	4 »	–	–	–	–	–	–
Marly	2. 5,5	48.52,1	138	7 »	980,926	,968	,953	980,977	— 9	—2
Les Essarts	1.53,5	48.43,4	173	10 »	,898	,951	,932	,964	—13	—3
Sonchamp	1.52,7	48.34,6	134	10 »	,894	,936	,920	,951	—15	—3
Ville-Louvette	2.11,9	48.34,6	56	10 »	,904	,921	,915	,951	—30	—3
Tigery	2.30,5	48.38,4	84	10 »	,899	,925	,915	,957	—32	—4
Bagneux	–	–	–	12 »	–	–	–	–	–	–
St-Clair-sur-Epte	1.40,9	49.12,4	46	25 »	,977	,991	,986	981,008	—17	—2
Lyons	1.28,5	49.24,0	103	25 »	,980	981,012	981,000	,025	—13	—2
Forges	1.32,5	49.37,0	165	25 »	980,993	981,044	981,025	981,044	— 0	—1
Dieppe	1. 0,4	49.55,4	17	27 »	981,061	,066	,064	,072	— 5	—
St-Saens	1.17,1	49.40,4	100	27 »	,008	,039	,028	,049	—10	—2
Mesnières	1.22,8	49.45,8	72	27 »	,034	,056	,048	,057	— 1	—
Fresnoy	1.25,9	49.53,4	191	27 »	,016	,075	,053	,069	+ 6	—1
Le Tréport	1.22,1	50. 3,7	10	28 »	,073	,076	,075	,084	— 8	—
Rue	1.40,1	50.16,4	9	30 »	,084	,087	,086	,103	—16	—1
Auxi	2. 7,5	50.13,9	40	30 »	,068	,080	,076	,099	—19	—2
L'Étoile	2. 1,6	50. 1,2	16	30 »	,066	,071	,069	,080	— 9	—1
Oisemont	1.46,0	49.57,4	122	30 »	,041	,079	,065	,075	+ 4	—
Le Tréport	1.22,1	50. 3,7	10	4 août	,074	,077	,076	,084	— 6	—
Aumale	1.45,2	49.46,1	134	5 »	,029	,070	,055	,058	+12	—
Moliens	1.48,7	49.40,0	215	5 »	980,999	,065	,041	,049	+16	—
Marseille	1.57,3	49.34,6	121	5 »	981,000	,038	,024	,041	— 3	—1
Le Vauroux	1.55,6	49.22,6	199	5 »	980,953	,014	980,992	,023	— 8	—2
Méru	2. 8,1	49.14,2	92	5 »	,954	980,983	,972	,010	—27	—3
Bagneux	–	–	–	5 »	,932	–	–	–	–	–

ASTROPHYSIQUE. — *Sur la clarté d'une lunette pour les étoiles et l'expression de la magnitude limite.* Note (¹) de M. **Louis Roy.**

On sait que la clarté d'une lunette pour les étoiles, définie comme le rapport du flux lumineux envoyé par une étoile et pénétrant dans l'œil au sortir de la lunette au flux correspondant dans la vision à l'œil nu, a pour expression

$$C = \mu G^2, \quad \text{avec} \quad G = \frac{D}{d}, \tag{1}$$

(¹) Séance du 9 avril 1947.

μ étant le facteur de transmission et G le grossissement équipupillaire, rapport des ouvertures D et d de la lunette et de la pupille. D'autre part, la diminution de magnitude obtenue, en passant de la vision à l'œil nu à la vision à la lunette d'une même étoile, étant

$$\Delta m = 2,5\, lg\, \mathrm{C}, \tag{2}$$

il en résulterait que cette diminution est indépendante du grossissement g utilisé, ce qui n'est pas.

Pour rendre compte de ce fait d'observation qu'au delà d'une certaine valeur g_1 de g, nettement supérieure au grossissement résolvant D/2, D étant exprimé en millimètres, le passage de g à $1,6g$ entraîne la perte d'une magnitude, MM. Danjon et Couder ([2]) substituent à la clarté C son produit par $(g_1/g)^2$; d'où il résulte, d'après (2), qu'on a

$$m - m' = 5\, lg \frac{g'}{g}, \tag{3}$$

m et m' étant les magnitudes limites pour l'ouverture D employée avec les grossissements g et g' au moins égaux à g_1 ; d'où $m - m' = 1$, pour $g' = 1,6g$.

Le but de cette Note est de montrer qu'on arrive au même résultat (3) et à l'expression de m en fonction de D et de g pour $g \geqq g_1$, mais d'une manière peut-être plus satisfaisante, en substituant l'éclairement au flux lumineux, ainsi qu'on le fait pour la définition de la clarté dans le cas d'objets d'étendue sensible et même pour les planètes. Et cependant une planète, dont le diamètre apparent est le plus souvent très inférieur à 1′, apparaît à l'œil nu comme un simple point lumineux.

Considérons donc les deux images rétiniennes provenant d'une même étoile d'éclat E, observée à la lunette et à l'œil nu ; y étant l'ordonnée en un point du solide de diffraction, d'axe Oy issu de sa base et de hauteur 1, les éclairements en deux points homologues de ces images, c'est-à-dire de même abscisse radiale

$$x = \pi \frac{\mathrm{D}}{\lambda} \frac{r}{\mathrm{F}} = \pi \frac{d}{\lambda} \frac{\rho}{\varphi},$$

λ étant la longueur d'onde de la radiation la plus sensible à l'œil, F et φ les distances focales de la lunette et de l'œil, r et ρ les distances des deux points homologues au centre de chaque image, ont pour expressions

$$\mathcal{E} = \mu_0 \frac{\mathrm{KED}^4}{\mathrm{F}^2} y \cdot \mu_1 \left(\frac{f}{\varphi}\right)^2 = \mu \frac{\mathrm{KED}^4}{g^2 \varphi^2} y, \qquad e = \frac{\mathrm{KE}d^4}{\varphi^2} y, \tag{4}$$

K étant une constante, μ_0 et μ_1 les facteurs de transmission à travers l'objectif et l'oculaire, dont le produit μ est le facteur de transmission total, f la distance

---

([1]) *Lunettes et télescopes*, Paris, 1935, p. 39.

focale de l'oculaire, $g = F/f$ le grossissement utilisé. Le premier facteur du premier second membre est l'éclairement au point (x, y) du plan focal et le second facteur suppose, pour simplifier, l'oculaire mis au point pour l'accommodation à l'infini, ce qui est le cas usuel. D'où le rapport

$$\Gamma = \frac{\mathcal{E}}{e} = \mu \frac{D^4}{d^4 g^2} = C\left(\frac{G}{g}\right)^2, \qquad (5)$$

d'après (1), qui se substitue ainsi naturellement à la clarté C quand on passe du rapport des flux à celui des éclairements, En particulier

$$\Gamma = C, \quad \text{pour} \quad g = G,$$

circonstance due à ce que les deux images rétiniennes ont alors mêmes dimensions, en ce sens qu'il en est ainsi de leurs anneaux noirs successifs. On voit que l'expression (5) correspond à la nouvelle expression de la clarté adoptée par MM. Danjon et Couder, sauf que g_1 reçoit ici la valeur G au moins trois fois plus petite.

Malgré cette circonstance, les formules (4) et (5) redonnent la relation (3). Tout d'abord, il résulte de (4) et (5) que l'étoile d'éclat E, vue à la lunette, apparaît comme une étoile d'éclat ΓE vue à l'œil nu, ce qui conduit à la formule (2), où C est remplacé par Γ, puis à (3).

Considérons enfin deux étoiles d'éclat E, E′ et de magnitudes m, m', respectivement à la limite de visibilité dans deux lunettes de caractéristiques D, g, μ; D', g', μ'. Si l'on admet qu'il en est ainsi lorsque les éclairements des deux images rétiniennes ont atteint un même minimum, il vient, d'après la première (4),

$$\mu \frac{ED^4}{g^2} = \mu' \frac{E'D'^4}{g'^2},$$

de sorte que la loi de Pogson

$$m - m' = 2{,}5 \, lg \frac{E'}{E}$$

donne

$$m - m' = 2{,}5 \log \left[\frac{\mu}{\mu'}\left(\frac{g'}{g}\right)^2 \left(\frac{D}{D'}\right)^4\right]. \qquad (6)$$

En particulier, pour

$$\frac{g}{D} = \frac{g'}{D'}, \qquad (7)$$

la relation (6) coïncide avec celle bien connue qu'on obtient en égalant les flux lumineux à travers les deux instruments, et cette coïncidence résulte de ce fait que la condition (7) exprime que les deux images rétiniennes ont alors mêmes dimensions.

Si, par exemple, on admet qu'on a $\mu = \mu'$ et $m' = 12$, pour $D' = 100^{mm}$, $g' = 100$, la relation (6) devient

$$m = 2 + 5 \log \frac{D^2}{g},$$

D étant exprimé en millimètres; cette expression de la magnitude limite paraît conforme à l'observation pour $g \geqq D$, c'est-à-dire dès que la tache centrale de diffraction d'une étoile brillante devient nettement perceptible.

M. **Maurice Caullery** présente à l'Académie le fascicule I du tome 91 des *Proceedings of the American Philosophical Society*, contenant les exposés présentés à la réunion d'octobre 1946, où M. Julia et lui-même avaient été les délégués de l'Académie. Ces études sont groupées en trois symposia : 1° *Sur le rôle de l'Amérique dans le développement de la Science;* 2° *Sur les tendances présentes et les problèmes scientifiques d'ordre international;* 3° *Sur les problèmes d'organisation de la coopération scientifique internationale.* A ces trois symposia est joint un discours de Sir Henry Dale sur la *Liberté de la Science* (Pilgrim Trust Lecture). Cet ensemble montre l'ampleur et la coordination du programme établi pour cette réunion et l'efficacité de son organisation.

NOMINATIONS.

MM. **Camille Gutton** et **René Barthelemy** sont désignés pour représenter l'Académie au *Congrès international pour le Cinquantenaire de la découverte marconienne de la Radio*, qui aura lieu à Rome, du 28 septembre au 5 octobre 1947.

PLIS CACHETÉS.

M. **Georges-Gaston Bory** demande l'ouverture d'un pli cacheté reçu dans la séance du 4 mars 1940 et enregistré sous le n° 11670.

Ce pli, ouvert en séance par M. le Président, contient un Mémoire intitulé : *Le canon et la mécanique fluide. Balistique intérieure et intermédiaire.*

(Renvoi à la Section de Mécanique.)

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° *Supplément à la Flore générale de l'Indochine*, publiée sous la direction de H. Humbert. Tome premier. Fascicule 5 : *Balsaminacées* (*fin*), par Mme Tardieu-Blot. *Rutacées*, par André Guillaumin; *Simaroubacées, Irvingiacées, Ochnacées*, par François Gagnepain; *Burséracées*, par André Guillaumin; *Méliacées*, par François Pellegrin.

2° Marcel Boll. *Tables numériques universelles.*

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les fonctions indéfiniment dérivables sur une demi-droite.* Note de M. **Szolem Mandelbrojt**, présentée par M. Paul Montel.

Les inégalités que nous avons démontrées dans une Note précédente (1) permettent d'établir un théorème sur les fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle $(0, \infty)$, beaucoup plus général que ceux que j'ai démontrés dans mes travaux antérieurs.

Soient $\{q_n\}$ une suite d'entiers positifs, $N(q)$ la fonction de distribution de $\{q_n\}$ $\big(N(q)=0$ pour $0<q\leq q_1$, $N(q)=n$ pour $n<q\leq n+1\big)$ et $D(q)=N(q)/q$ la fonction de densité de $\{q_n\}$. On pose

$$D^*(q)=\overline{\mathrm{borne}}_{x\geq q}\, D(x),$$

c'est la fonction de densité supérieure de $\{q_n\}$. La quantité $D^*=\overline{\lim}\, D(q)$ est la densité supérieure de la suite. Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable sur $I\equiv(0, \infty)$, bornée, ainsi que chacune de ses dérivées sur I. Soit

$$m_n=\overline{\mathrm{borne}}\,|f^{(n)}(x)| \qquad (x\in I).$$

La fonction $C_f(\sigma)=\overline{\mathrm{borne}}_{n\geq 1}(n\sigma-\log m_n)$ sera appelée le caractère de f.

Théorème. — *Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable sur* I, *bornée, ainsi que chacune de ses dérivées, sur* I. *Soit $\{\nu_n\}$ une suite d'entiers non négatifs, avec $\nu_1=0$, la suite $\{q_n\}$ d'entiers positifs complémentaires de la suite $\{\nu_n\}$ étant de densité supérieure $D^*<1/2$, et supposons que*

(1) $$f^{(\nu_n)}(0)=0 \qquad (n\geq 1).$$

En désignant par $D^*(q)$ la fonction de densité supérieure de $\{q_n\}$, et par $C_f(\sigma)$ le caractère de f, supposons que

(2) $$\int^{\infty} C_f(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma}\frac{du}{1-2D^*(C_f(u))}}\, d\sigma=\infty \quad (2).$$

Dans ces conditions la fonction $f(x)$ est identiquement nulle.

La condition (2) peut être remplacée par la condition plus générale que voici : *Posons* $\nu(D)=\overline{\mathrm{borne}}_{q>0}\int_0^q \big(D(x)-D\big)\,dx$ $(D>D^*)$. *Il existe une fonction croissante $C(\sigma)$ et une fonction continue décroissante $h(\sigma)$ telles que* $\lim h(\sigma)=D^*$

---

(1) Voir S. Mandelbrojt, *Comptes rendus*, **224**, 1947, pp. 22-24.

(2) Nous écrirons $\int^{\sigma}$ ou $\int^{\infty}$ lorsque la limite inférieure du signe intégrale peut être prise arbitrairement grande (fixe).

et que

$$2\nu\big(h(\sigma)\big) - C_f(\sigma) < -C(\sigma),$$

$$\int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\int^{\sigma} \frac{du}{1-2h(u)}}\, d\sigma = \infty.$$

Le théorème qui suit montre que le théorème qu'on vient d'énoncer ne peut pas être amélioré très profondément. Soit $R(\sigma)$, $(\sigma \in I)$ une fonction bornée inférieurement. Il existe une fonction $\varphi(\sigma)$, convexe dans I, jouissant des propriétés suivantes : $\varphi(\sigma) \leqq R(\sigma)$, $(\sigma \in I)$, et, quelle que soit la fonction convexe $\psi(\sigma)$ telle que $\psi(\sigma) \leqq R(\sigma)$, $(\sigma \in I)$, on ait $\psi(\sigma) \leqq \varphi(\sigma)$. On écrira $\varphi(\sigma) = cnv\, R(\sigma)$.

THÉORÈME. — *Soit* $\{\nu_n\}$ *une suite d'entiers non négatifs, avec* $\nu_1 = 0$, *et soit* $\{q_n\}$ *la suite d'entiers positifs complémentaires de la suite* $\{\nu_n\}$. *Soit* $N(q)$ *la fonction de distribution de* $\{q_n\}$.

Il existe une fonction $f(x)$, *non identiquement nulle, indéfiniment dérivable sur* $I \equiv (0, \infty)$, *bornée, ainsi que chacune de ses dérivées sur* I, *telle que* $f^{(\nu_n)}(0) = 0$ $(n \geqq 1)$, *et telle que, en désignant par* $C_f(\sigma)$ *son caractère, on ait, pour* σ *suffisamment grand,*

$$C_f(\sigma) \geqq A\, cnv\, N(e^{\sigma}),$$

où A *est une constante positive.*

Voici un exemple montrant le rapport qui existe entre les deux théorèmes énoncés. Soit $f(x)$, $(x \in I)$ une fonction indéfiniment dérivable, bornée, ainsi que ses dérivées sur I, et supposons que $C_f(\sigma) > c\, e^{\sigma}$ $(c > 0)$. Si $f^{(\nu_n)}(0) = 0$, avec $q_n > an \log n$ $(a > 2)$ ($\{q_n\}$ étant la suite complémentaire de la suite $\{\nu_n\}$), on a $f(x) \equiv 0$. Ceci résulte du premier théorème. Si, par contre, $q_n \sim dn \log n$ $(0 < d < 1)$, il existe une fonction, non identiquement nulle, telle que $f^{(\nu_n)}(0) = 0$ et telle que $C_f(\sigma) > c\, e^{\sigma}/\sigma$, pour σ suffisamment grand.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une inégalité dans la théorie des fonctions bornées dans un anneau.* Note de M. **Zeev Nehari.**

Le but de la présente Note est d'établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $f(z)$ *une fonction holomorphe et uniforme dans l'anneau*

$$\rho^{\frac{1}{2}} < |z| < \rho^{-\frac{1}{2}} \qquad (0 < \rho < 1)$$

et soit $f'(\pm 1) = 0$ *et* $|f(z)| \leqq 1$ *dans cet anneau; alors*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqq \frac{|\mathcal{F}'(z)|}{1 - |\mathcal{F}(z)|^2}, \tag{1}$$

où

$$\mathcal{F}(z) = \sqrt{\rho}\, \frac{\prod_{0}^{\infty} (1 + \rho^{4n} z^{-2}) \prod_{1}^{\infty} (1 + \rho^{4n} z^2)}{\prod_{1}^{\infty} (1 + \rho^{4n-2} z^{-2}) \prod_{1}^{\infty} (1 + \rho^{4n-2} z^2)} = \sqrt{k}\, \mathrm{sn}\{-i\mathfrak{S}_3^2 \log iz\},$$

la fonction elliptique sn$u$ *possédant les périodes*

$$4k = 2\pi \mathfrak{I}_3^2(\rho^2) \quad et \quad 2ik' = -2i \log\rho\, \mathfrak{I}_3^2(\rho^2).$$

L'inégalité (1) *est la meilleure possible,* $\mathcal{F}(z)$ *satisfaisant à toutes les hypothèses.*

Pour la démonstration, nous nous servirons d'une méthode due à M. Ahlfors [1] utilisant les propriétés des fonctions sous-harmoniques. Remarquons d'abord que la fonction $w = \mathcal{F}(z)$ — comme on le vérifie sans difficulté à l'aide des propriétés bien connues de $w = \operatorname{sn} u$ — représente l'anneau $\rho^{1/2} < |z| < \rho^{-1/2}$ conformément sur une surface de Riemann R composée de deux feuillets, tous les deux couvrant complètement le cercle $|w| < 1$. R possède deux points de ramification du premier ordre aux points $w = \pm k$, qui correspondent aux points $z = \pm 1$ dans l'anneau.

Définissons maintenant les deux fonctions u et v par

$$(2) \qquad u = \log \frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2}, \qquad v = \log \frac{r|\mathcal{F}'(z)|}{r^2 - |\mathcal{F}(z)|^2} \qquad (\sqrt{k} < r < 1)$$

et désignons par S l'ensemble fermé des points z pour lesquels $|\mathcal{F}(z)| \leq r$; évidemment, S n'a pas de points communs avec $|z| = \rho^{1/2}$ et $|z| = \rho^{-1/2}$, d'où l'on conclut que $f(z)$ est holomorphe dans S. Si z est dans S et si $f'(z)$ et $\mathcal{F}'(z)$ ne s'annulent pas, u et v satisfont aux équations différentielles

$$\Delta u = 4e^{2u}, \qquad \Delta v = 4e^{2v},$$

d'où

$$(3) \qquad \Delta(u - v) = 4(e^{2u} - e^{2v}).$$

$\mathcal{F}'(z)$ a des zéros simples aux points $z = \pm 1$; par hypothèse, $f'(\pm 1) = 0$. Par conséquent, si $z = \pm 1$ sont des points singuliers de $u - v$, ces singularités seront telles que $u - v$ tendra vers $-\infty$ pour $z \to \pm 1$. Puisque $\mathcal{F}'(z) \neq 0$ si $z \neq \pm 1$, $u - v$ n'a pas de singularités dans S, sauf les zéros de $f'(z)$ et, peut-être, les points $z = \pm 1$. Supposons maintenant qu'il existe un ensemble de points E dans S tel que $u > v$ lorsque z appartient à E. Les zéros de $f'(z)$ et les points $z = \pm 1$, s'ils sont des singularités, seront évidemment en dehors de E. Alors, $u - v$ n'aura aucune singularité dans E, et l'on y aura, en vertu de (3), $\Delta(u - v) > 0$; c'est-à-dire, la fonction $u - v$ sera sous-harmonique dans E. Par conséquent, $u - v$ n'a pas de maximum dans E et doit s'approcher de sa limite supérieure lorsque z tend vers la frontière de E. Mais E ne peut pas posséder de point frontière en commun avec S, puisque sur la frontière de S la fonction v devient positivement infinie; aux points frontière de E qui sont situés à l'intérieur de S, on a, par continuité, $u - v = 0$. L'hypothèse qu'il existe dans S des points pour lesquels $u > v$ conduit donc à une contradiction, et nous avons $u \leq v$ pour tous les points de S.

---

(1) *Transactions of the American Mathematical Society*, 43, 1938.

Si r tend vers 1, S remplit tout l'anneau $\rho^{\frac{1}{2}} < |z| < \rho^{-\frac{1}{2}}$; en vue de (2) nous avons donc démontré (1) pour tout z dans ce domaine.

2. En donnant à z des valeurs particulières, on peut déduire de (1) beaucoup de détails concernant les fonctions $f(z)$; par exemple, pour $z = \pm i$ on obtient, en vertu de $\mathcal{F}(\pm i) = 0$, $|\mathcal{F}'(\pm i)| = \vartheta_2(\rho^2)\vartheta_3(\rho^2)$,

$$|f'(\pm i)| \leq \vartheta_2(\rho^2)\vartheta_3(\rho^2) = 2\sqrt{\rho}\prod_1^\infty(1-\rho^{2n})^2\prod_1^\infty(1+\rho^{2n})^4,$$

qui est une inégalité exacte.

Si l'on ajoute l'hypothèse $f(i) = 0$, (1) permet de démontrer que, pour $\rho^{\frac{1}{2}} < |z| < \rho^{-\frac{1}{2}}$, $\mathcal{R}\{z\} > 0$, $f(z)$ satisfait à l'inégalité

$$(4) \qquad |f(z)| \leq |\mathcal{F}(z)|.$$

En effet, en intégrant (1) le long d'une courbe joignant le point i au point z et sur laquelle l'argument de $\mathcal{F}(z)$ est constant — ce qui est évidemment possible pour tout point de l'anneau satisfaisant à $\mathcal{R}\{z\} > 0$ — et en observant que $d|f(z)| \leq |df(z)|$, on obtient

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+|f(z)|}{1-|f(z)|} \leq \frac{1}{2}\log\frac{1+|\mathcal{F}(z)|}{1-|\mathcal{F}(z)|},$$

ce qui est équivalent à (4).

3. Le théorème énoncé ci-dessus peut être généralisé sans difficulté pour des domaines d'ordre de connexion quelconque. Si D est un domaine simple limité par n continus, nous désignons par $w = \mathcal{F}(z)$ la fonction analytique représentant D sur une surface de Riemann F composée de n feuillets couvrant le cercle $|w| < 1$ dont toutes les frontières coïncident avec $|w| = 1$. F a $2n-2$ points de ramification qui correspondent à $2n-2$ points $z_1, \ldots, z_{2n-2}$ dans D. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe et si $|f(z)| \leq 1$ dans D et si

$$f'(z_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n-2),$$

alors le même raisonnement que dans le cas précédent nous conduit à l'inégalité (1). Cependant, il n'est pas possible de donner des résultats numériques dans le cas général, puisque pour $n > 2$ la fonction n'est connue explicitement pour aucun domaine canonique.

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur les représentations réelles des groupes topologiques abéliens*. Note [1] de M. **Jean Riss**, présentée par M. Élie Cartan.

Dans une Note antérieure [2], nous nous sommes occupé des *représentations continues* des groupes topologiques abéliens dans le groupe additif des nombres

---

[1] Séance du 9 avril 1947.

[2] *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 987.

réels. Dans la présente Note, nous étudions le *prolongement* de telles représentations définies sur des sous-groupes et donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une représentation soit un *homomorphisme*.

1. Soient f une représentation d'un sous-groupe H d'un groupe abélien G dans $\mathbf{R}$, K(H) le *convexe topologique* de H. Si $x \in K(H)$, quel que soit le voisinage V de e dans G, il existe $h \in H$ et un entier $n > 0$ tels que $x^n \in hV^n$. Pour x et V donnés, considérons l'ensemble de ces relations et désignons par $A_V(x)$ l'ensemble correspondant des nombres $f(h)/n$; posons alors $A(x) = \bigcap_V \overline{A_V(x)}$ (1). On a alors :

a. $A(x) \neq \emptyset$, car dans la droite rendue *compacte* par l'adjonction d'un *point à l'infini*, les $A_V(x)$ forment une *base de filtre*.

b. $A(x^{-1}) = -A(x)$; $A(xy) = A(x) + A(y)$, d'où il résulte que $A(x) + A(x^{-1}) = A(e)$ et que $A(e) = \mathbf{R}$ ou $\{0\}$.

THÉORÈME 1. — *Pour que* $A(e) = \{0\}$, *il faut et il suffit que, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *il existe un voisinage* V *de e dans* G *tel que, pour tout n, on ait* $|f(V^n \cap H)| < n\varepsilon$ (2). *Dans ces conditions* $x \to A(x)$ *est une représentation continue de* K(H) *dans* $\mathbf{R}$ *et, si la représentation f de* H *dans* $\mathbf{R}$, *donnée à l'avance, est effectivement prolongeable en une représentation continue de* G *dans* $\mathbf{R}$ [*auquel cas* (2) *est nécessaire*], *alors* $x \to A(x)$ *est la restriction à* K(H) *des divers prolongements possibles de f*.

2. Si H = K(H), et si f est une représentation continue définie sur H, on *prolongera continûment f* à $H' = (\cup\{a, a^{-1}\})^\infty$ en posant $f(ha^n) = f(a) + n\omega$ où ω est une constante arbitraire.

3. On sait que toute *forme linéaire* sur un *espace vectoriel* E (sur le corps des nombres réels) est complètement déterminée (à un facteur constant près) par l'ensemble (*hyperplan*) des points où elle s'*annule* et, inversement. D'autre part, dans le cas d'un espace vectoriel E *localement convexe*, pour qu'une forme f sur E soit *continue*, il faut et il suffit que $\overset{-1}{f}(0)$ soit *fermé*.

Des exemples montrent qu'il en est autrement des représentations réelles des groupes abéliens : il peut exister une infinité de représentations différentes d'un groupe G, s'annulant sur un même sous-groupe de G, une partie de ces représentations pouvant être continues, sans qu'il en soit ainsi de toutes.

Ces singularités disparaissent quand on considère des *homomorphismes* : ceux-ci peuvent être caractérisés par l'ensemble des points où ils s'annulent. Pour le montrer, posons les définitions suivantes, où G désigne un groupe topologique abélien :

DÉFINITION 1. — *Un groupe* G *sera dit localement convexe si, quel que soit le voisinage* V *de e dans* G, *il exige un voisinage* W *de e tel que* $k(W) \subset V$.

Il existe alors un voisinage W′ de e tel que $K(W') \subset V$.

DÉFINITION 2. — *Un sous-groupe* H *de* G *est dit convexe topologique maximal de* G *si* K(H) = H *et si* $H \subset H'$ *entraîne* $K(H') = G$.

On a alors le

THÉORÈME 2. — *Pour qu'une représentation continue f du groupe* G *dans* **R** *soit un homomorphisme, il faut et il suffit que* $\mathrm{H} = \overset{-1}{f}(\mathrm{O})$ *soit un convexe topologique maximal de* G *et que* G/H *soit un groupe cyclique discret ou un groupe non discret localement convexe. Inversement, si un sous-groupe* H *de* G *satisfait à ces conditions, il existe une représentation continue de* G *dans* **R** *et une seule, non identiquement nulle, s'annulant sur* H, *et c'est un homomorphisme.*

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur le groupe $\mathfrak{T}_\infty$ des tableaux infinis.* Note de M. **Léo Kaloujnine**, présentée par M. Jacques Hadamard.

La présente Note est consacrée à quelques généralisations des notions et des résultats exposés dans mes Notes sur les p-groupes de Sylow du groupe symétrique du degré p^m ([1]). Je conserve les notations de ces Notes.

Étant donné le groupe $\mathfrak{T}_m$ des tableaux du rang m et le groupe $\mathfrak{T}_s$ des tableaux de rangs $s < m$, je considère l'homomorphisme canonique $f_{s,m}$ du groupe $\mathfrak{T}_m$ sur $\mathfrak{T}_s$, qui applique le tableau $\mathrm{A}_m = [a, a(\mathrm{X}_1), \ldots, a(\mathrm{X}_{m-1})] \in \mathfrak{T}_m$ sur le tableau $\mathrm{A}_s = f_{s,m}(\mathrm{A}_m) = [a, a(\mathrm{X}_1), \ldots, a(\mathrm{X}_{s-1})] \in \mathfrak{T}_s$. ($\mathrm{X}_i$ représente le vecteur de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_i$). Si $r < s < m$, on a $f_{r,m}(\mathrm{A}_m) = f_{r,s}(f_{s,m}(\mathrm{A}_m))$. Je forme la limite projective ([2]) des groupes $\mathfrak{T}_m$ à l'aide de ces homomorphismes et j'obtiens le groupe $\mathfrak{T}_\infty$ des tableaux infinis de la forme

$$\mathrm{A} = [a, a(\mathrm{X}_1), a(\mathrm{X}_2), \ldots, ad_\infty].$$

Si $[\mathrm{A}]_s = a(\mathrm{X}_{s-1})$ désigne la $s^{\text{ième}}$ coordonnée de A, et si ${}^{\mathrm{A}_{s-1}}\mathrm{X}_{s-1}$ est le transformé de X_{s-1} par la transformation ${}^{\mathrm{A}_{s-1}}x_i = x_i - a(\mathrm{X}_{i-1})$, la loi de composition des tableaux infinis est $[\mathrm{AB}]_s = a(\mathrm{X}_{s-1}) + b({}^{\mathrm{A}_{s-1}}\mathrm{X}_{s-1})$. Cette loi généralise d'une manière naturelle celle de la composition des tableaux de rang fini. L'*indicatrice* $|\mathrm{A}|$ d'un tableau est, par définition, la suite $|\mathrm{A}| = \{|\mathrm{A}|_1, |\mathrm{A}|_2, \ldots\}$ où $|\mathrm{A}|_s = h(a(\mathrm{X}_{s-1})) = h([\mathrm{A}]_s)$, et la *profondeur* du tableau A est le premier indice δ, tel que $|\mathrm{A}|_{\delta+1} \neq 0$.

On prend comme système fondamental des voisinages de l'unité la suite des sous-groupes $\mathcal{D}_\delta$ des tableaux de profondeur $\geqq \delta$. On voit immédiatement que pour cette topologie le groupe $\mathfrak{T}_\infty$ est un groupe complet et compact.

Définissons, comme suit, un ordre (partiel) des indicatrices des tableaux : $|\mathrm{A}| \leqq |\mathrm{B}|$, si, et seulement si, pour tout $s = 1, 2, \ldots$, $|\mathrm{A}|_s \leqq |\mathrm{B}|_s$. $\mathrm{K} = \{k_1, k_2, \ldots\}$ étant une suite d'entiers telle que $0 \leqq k_\sigma \leqq p^{\sigma-1}$, on définit le sous-groupe parallélotopique $\mathcal{R}$ d'indicatrice K comme l'ensemble des tableaux A tels que $|\mathrm{A}| \leqq \mathrm{K}$. On pose $|\mathcal{R}| = \mathrm{K}$ et l'on appelle K l'indicatrice de $\mathcal{R}$. Les résultats

(1) *Comptes rendus*, **221**, 1945, p. 222; **222**, 1946, p. 1424; **223**, 1946, p. 703; **224**, 1947, p. 255.

(2) ANDRÉ WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques*. Paris, 1940, p. 23.

exposés dans ma Note sur les sous-groupes parallélotopiques et les sous-groupes caractéristiques s'appliquent textuellement au cas du groupe $\mathfrak{T}_\infty$, à savoir : 1° Un groupe parallélotopique $\mathcal{R}$ de $\mathfrak{T}_\infty$ de profondeur δ est invariant dans $\mathfrak{T}_\infty$ si, et seulement si, pour tout σ $|\mathcal{R}|_\sigma \geqq p^{\sigma-1} - p^\delta$. 2° L'ensemble des sous-groupes parallélotopiques et invariants coïncide avec l'ensemble des sous-groupes caractéristiques fermés de $\mathfrak{T}_\infty$.

$\mathfrak{T}_\infty$ possède une suite centrale descendante $\mathfrak{T}_\infty = \tilde{z}_0$ et $\tilde{z}_{r+1} = (\mathfrak{T}_\infty, \tilde{z}_r)$. $\tilde{z}_r$ est le sous-groupe parallélotopique et invariant de l'indicatrice

$$\{(1-r)^+, (p-r)^+, \ldots, (p^{\sigma-1}-r)^+, \ldots\}, \quad \text{où} \quad a^+ = \mathrm{Max}(a, 0).$$

Il est manifeste que l'intersection de tous les $\tilde{z}_r$ se réduit à l'unité. La suite centrale ascendante est absente.

Remarquons que $\mathfrak{T}_\infty$ possède une suite de sous-groupes dont les indices sont des puissances de p et dont l'intersection est l'unité. (Par exemple la suite des groupes $\mathcal{D}_\delta$.) Appelons p_∞-groupe, un groupe possédant une telle suite. On peut montrer que chaque p_∞-groupe est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{T}_\infty$.

A cet effet envisageons le groupe $\mathcal{S}_{p^\infty}$ des isométries (considérées comme applications) de l'espace $\mathcal{I}_p$ des entiers p-adiques ([3]), c'est-à-dire l'ensemble des applications $f(\alpha)$ de $\mathcal{I}_p$ sur lui-même, telles que $|f(\alpha) - f(\beta)| = |\alpha - \beta|$. Désignons par $\mathcal{N}_m$ l'ensemble de toutes les $f \in \mathcal{S}_{p^\infty}$ telles que pour tout $\alpha \in \mathcal{I}_p$ $f(\alpha) \equiv \alpha \pmod{p^m}$. $\mathcal{N}_m$ est un sous-groupe invariant de $\mathcal{S}_{p^\infty}$ d'indice fini et le groupe quotient $\mathcal{S}_{p^\infty}/\mathcal{N}_m$ est isomorphe au groupe symétrique du degré p^m. L'intersection de la suite $\mathcal{N}_m (m = 0, 1, \ldots)$ se réduisant à l'unité, nous la considérons comme un système fondamental de voisinages de l'unité, introduisant ainsi une topologie dans le groupe $\mathcal{S}_{p^\infty}$. On peut démontrer (en analogie avec les théorèmes de Sylow) que $\mathcal{S}_{p^\infty}$ possède des p_∞-sous-groupes maximaux qui sont conjugués, donc isomorphes entre eux et que chaque sous-groupe fermé de $\mathcal{S}_{p^\infty}$ qui est un p_∞-groupe est contenu dans un de ces sous-groupes maximaux. D'autre part, on vérifie que $\mathfrak{T}_\infty$ est précisément isomorphe à un tel p_∞-groupe maximal.

Soient maintenant $\mathcal{G}$ un p_∞-groupe et $\mathcal{G} = \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_1 \supset \ldots, \supset 1(\mathcal{G})$ une suite de sous-groupes dont l'intersection est l'unité et dont les indices dans $\mathcal{G}$ sont des puissances de p. On peut supposer, sans restreindre la généralité, que les $\mathcal{H}_r$ sont des sous-groupes invariants de $\mathcal{G}$. Considérons la suite des $\mathcal{H}_r$ comme un système fondamental de voisinages de l'unité. Si pour cette topologie le groupe $\mathcal{G}$ n'est pas complet, nous le complétons à la manière habituelle à l'aide des suites fondamentales. Soit $\overline{\mathcal{G}}$ le groupe complété : $\overline{\mathcal{G}}$ admet des représentations fidèles comme sous-groupe fermé de $\mathcal{S}_{p^\infty}$. Donc $\overline{\mathcal{G}}$, et, par suite, $\mathcal{G}$, est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{T}_\infty$.

([3]) J'utilise des idées exposées par M. van Dantzig dans plusieurs mémoires, notamment dans *Zur topologischen Algebra III* (*Compositio Mathematica*, 3, 1936, p. 200).

$\mathfrak{P}_\infty$ est donc, en quelque sorte, un groupe universel pour les p_∞-groupes; car, étant donné un groupe contenant tous les p_∞-groupes, il doit également contenir $\mathfrak{P}_\infty$. Or, malheureusement, le type de $\mathfrak{P}_\infty$ n'est pas univoquement déterminé par cette condition. Il y a d'autres groupes ayant la même propriété. Le produit direct $\mathfrak{P}_\infty \times (p)$ de $\mathfrak{P}_\infty$ et du groupe cyclique d'ordre p est un groupe qui contient un groupe isomorphe à $\mathfrak{P}_\infty$ et, étant un p_∞-groupe, il est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{P}_\infty$. Or $\mathfrak{P}_\infty \times (p)$ possédant un centre de l'ordre p n'est pas isomorphe au groupe $\mathfrak{P}_\infty$, dont le centre se réduit à l'unité.

Il serait intéressant de savoir par quelles propriétés intrinsèques supplémentaires on pourrait complètement caractériser le groupe $\mathfrak{P}_\infty$.

MÉCANIQUE ONDULATOIRE. — *Sur les équations d'onde non linéaires de la théorie quantique de l'électron.* Note de M. **Bernard Kwal.**

1. Les difficultés de la mécanique ondulatoire sous sa forme actuelle sont bien connues et les divers essais, tentés en vue de les tourner, n'ont pas donné jusqu'ici le résultat escompté. Nous allons envisager une voie nouvelle, qui nécessite une modification à la fois du cadre mathématique et de certains principes physiques de la théorie. L'examen du schéma lagrangien, qui se trouve être à la base même de la mécanique ondulatoire, nous montre, en effet, qu'il s'en déduit en général une théorie *non linéaire*. Une des tâches de la recherche future consistera à dégager le principe physique nouveau, susceptible de préciser la forme du lagrangien en question dont on sait déjà qu'il doit nous redonner en première approximation les mécaniques ondulatoires linéaires de Schrödinger et de Dirac.

2. Considérons dans l'espace-temps un milieu continu où le champ est décrit au moyen des grandeurs spinorielles $\eta^\beta(x_{\alpha\beta})$ et de leurs dérivées $\varpi_{\alpha\beta}\eta^\beta$. Soit $L(\eta^\beta, \varpi_{\alpha\beta}\eta^\beta)$ une fonctionnelle scalaire. En admettant que les variations des fonctions η^β s'annulent aux frontières du domaine d'intégration, les équations de Lagrange, relatives au principe variationnel impliquant la fonction L, s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^\beta} - \sum_\alpha \varpi_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\varpi_{\alpha\beta_1} \eta^{\beta_1})} = 0. \tag{1}$$

Nous poserons

$$\xi_\alpha = \varpi_{\alpha\beta}\eta^\beta, \tag{2}$$

qui sera une *équation de définition*, au même titre que le sont celles qui relient en électromagnétisme les champs aux potentiels. Nous définirons en outre, grâce aux relations suivantes

$$\eta'_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^\beta}, \qquad \xi'^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_\alpha}, \tag{3}$$

une *fonction d'onde de polarisation*, qui va jouer dans notre théorie un rôle

analogue à celui joué par le champ de polarisation dans les théories électromagnétiques des milieux pondérables ou dans les électrodynamiques non linéaires de G. Mie et de M. Born.

Cela étant, les équations de Lagrange (1) nous fournissent les équations auxquelles obéissent les spineurs de polarisation et qui sont

$$\eta'_\beta = \varpi_{\alpha\beta}\xi'^{\alpha}. \tag{4}$$

Les systèmes (2), (3) et (4) constituent les équations de base de la mécanique ondulatoire relativiste, en général non linéaire, de l'électron. La théorie linéaire, c'est-à-dire les équations de Dirac, s'obtient, en prenant comme lagrangien une fonction linéaire des invariants élémentaires, formés à l'aide des spineurs de champ, c'est-à-dire la fonction suivante

$$\mathcal{L}_0 = \eta_\beta \eta^\beta + \varkappa^2 (\varpi_{\alpha\beta_1}\eta^{\beta_1})(\varpi^{\beta_2\alpha}\eta_{\beta_2}). \tag{5}$$

A titre d'exemple, nous donnons ci-dessous un lagrangien, qui, en première approximation, redonne la théorie de Dirac et qui est construit en analogie avec celui de la théorie de Born

$$\mathcal{L} = a^2\left[\left\{1 + \frac{2}{a^2}(\xi_\alpha + \eta_\alpha)(\xi^\alpha + \eta^\alpha) + \varkappa^2(\xi_\beta - \eta_\beta)(\xi^\beta - \eta^\beta)\right\}^{\frac{1}{2}} - 1\right], \tag{6}$$

et où $\xi^\beta - \eta^\beta$ représente la variable canonique.

3. A l'approximation newtonienne, le lagrangien $\mathcal{L}$ sera fonction de la grandeur de champ $\psi^\star$ et de ses dérivées $\partial_l\psi^\star$. Des équations de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\star} - \sum_{l=1,2,3,4} \frac{\partial}{\partial X_l}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_l \psi^\star)} = 0, \tag{7}$$

on tire les équations de Schrödinger, en considérant le lagrangien

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{h^2}{8\pi^2 m}\sum_{k=1,2,3}\left(\frac{\partial\psi}{\partial X_k}\right)\left(\frac{\partial\psi^\star}{\partial X_k}\right) - \frac{h}{4\pi i}\left(\psi\frac{\partial\psi^\star}{\partial t} - \psi^\star\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - U\psi\psi^\star \tag{8}$$

Le lagrangien suivant

$$\mathcal{L} = a^2\left(\sqrt{1 + \frac{2}{a^2}\mathcal{L}_0} - 1\right) \tag{9}$$

donne naissance à l'équation d'onde non linéaire

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{h^2}{8\pi^2 m}\Delta\psi - U\psi = \frac{h^2}{8\pi^2 m}\sum_{k=1,2,3}\frac{\partial\psi}{\partial X_k}\frac{\partial}{\partial X_k}\log\sqrt{1 + \frac{2}{a^2}\mathcal{L}_0} + \frac{h}{4\pi i}\psi\frac{\partial}{\partial t}\log\sqrt{1 + \frac{2}{a^2}\mathcal{L}_0}, \tag{10}$$

qui se réduit à celle de Schrödinger pour $a \to \infty$.

RADIOÉLECTRICITÉ. — *Sur le circuit en hélice utilisé dans le tube à ondes progressives.* Note (¹) de M. **Élie Roubine.**

Une hélice illimitée, inclinée de l'angle $\pi/2-\alpha$ sur les génératrices d'un cylindre de révolution de rayon a sur lequel elle est tracée, est le siège d'une onde progressive de courant $\mathrm{I}\,e^{-jks}$ ($k=\omega/v$), où s est l'abscisse curviligne sur l'hélice. ω est la pulsation du régime supposé sinusoïdal dans le temps et v la vitesse de l'onde le long du fil est supposée égale à celle des ondes électromagnétiques dans le milieu libre. Il est commode d'introduire la distribution auxiliaire de charges de densité linéique

$$q=\frac{\mathrm{I}}{v}e^{-jks},$$

satisfaisant à la condition de continuité

$$\frac{d\,\mathrm{I}(s)}{ds}+j\omega q(s)=0.$$

Des potentiels retardés

$$\mathrm{V}=\frac{\mathrm{I}}{\varepsilon v}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jk(r+s)}}{r}\,ds,$$

$$\vec{\mathrm{A}}=\mathrm{I}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-jk(r+s)}}{r}\,\vec{ds},$$

on déduit la composante axiale du champ électrique sur l'axe, composante qui joue un rôle essentiel dans la théorie du tube

$$\mathrm{E}_z=-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}-j\omega\mu \mathrm{A}_z.$$

Il est possible d'obtenir l'expression exacte et explicite de E_z

$$\mathrm{E}_z=2j\omega\mu\,\mathrm{cotg}^2\alpha\,\mathrm{I}\,\mathrm{K}_0(ka\,\mathrm{cotg}\,\alpha)\,e^{-j\frac{k}{\sin\alpha}z},$$

où K_0 est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre zéro.

Le facteur de propagation $e^{-j(k/\sin\alpha)z}$ confirme que le champ se propage axialement avec la vitesse réduite $v\sin\alpha$.

En unités pratiques M. K. S., l'amplitude est donnée par

$$|\mathrm{E}_z|=4\pi f\,10^{-7}\,\mathrm{cotg}^2\alpha\;\mathrm{I}\;\mathrm{K}_0(2{,}09.10^{-8}fa\,\mathrm{cotg}\,\alpha)\quad \mathrm{V/m}.$$

La variation de cette amplitude lorsque l'un quelconque des paramètres f, α, a varie est immédiate. Ainsi elle montre un maximum pour la fréquence

$$f=28{,}4\,\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{a}\quad \mathrm{MH}_z$$

(¹) Séance du 9 avril 1947.

ou pour l'inclinaison α telle que

$$\operatorname{tg}\alpha = 1{,}35.10^{-8} fa.$$

Le calcul peut être repris dans l'hypothèse d'une vitesse v' le long du fil inférieur à la vitesse v des ondes libres; on trouve alors, en posant $k' = \omega/v'$,

$$E_z = 2 j \omega \mu \left(\frac{k'}{k \sin^2 \alpha} - 1 \right) I K_0 \left(a \sqrt{\frac{k'^2}{\sin^2 \alpha} - k^2} \right) e^{-j \frac{k'}{\sin \alpha} z}.$$

ANALYSE ÉLECTRONIQUE. — *Sur l'examen par diffraction électronique des surfaces obtenues par polissage électrolytique*. Note de M. **Jean-Jacques Trillat**.

La diffraction des électrons par des surfaces métalliques polies permet d'apporter d'importants renseignements sur la structure des couches situées au voisinage immédiat (quelques centaines d'angströms) de la surface libre du métal. En particulier, elle permet de montrer l'existence d'une couche amorphe provenant du travail de polissage, appelée couche de Beilby, et qui jouit de propriétés remarquables quant à l'adsorption et la lubrification (G. Finch, G. P. Thomson, Cochrane, Kirchner, Raether, etc.); les interprétations données sur la nature exacte de cette couche sont d'ailleurs encore assez contradictoires. Le polissage électrolytique, obtenu suivant les méthodes de Jacquet, a été étudié à ce point de vue par un certain nombre d'auteurs, utilisant principalement la diffraction d'électrons ([1]) et parfois la diffraction des rayons X ([2]).

Nous avons examiné des échantillons de fer pur, d'aluminium et de cuivre préparés par M. Rocquet, à partir de tôles minces préalablement abrasées par des papiers émeri 000 ou 0000, puis polies électrolytiquement soit au bain perchlorique acétique (Fe, Al), soit au bain phosphorique (Fe, Cu, Al). Les échantillons polis, soigneusement lavés à l'eau distillée et à l'alcool, ont été examinés sous incidence tangentielle au moyen d'un faisceau d'électrons de 40 kilovolts; la préparation, grâce à un dispositif permettant quatre mouvements dans le vide, pouvait être étudiée systématiquement en chaque point de sa surface, et de nombreux diagrammes étaient enregistrés en différentes régions.

Pour le fer témoin, simplement poli mécaniquement, on observe les halos caractéristiques attribués à la couche amorphe de Beilby. Après polissage électrolytique au bain perchlorique acétique, on n'observe ordinairement

---

([1]) K. H. Moore, *Ann. de Phys.*, 33, 1938, p. 133; Kranert, Leise et Raether, *Zeit. f. Phys.*, 122, 1944, p. 248; E. J. Taboury, *Journées des États de surface*, 23, 1945, p. 40.

([2]) J. Bernard, P. Lacombe et G. Chaudron, *Journées des États de surface*, 23, 1945, p. 44.

qu'une diffusion générale à laquelle se superpose parfois faiblement le diagramme de Feα et d'oxyde. Le bain phosphorique donne le même résultat.

Pour l'aluminium, alors que le témoin ne donne que des halos de Beilby, le polissage en bain perchlorique acétique fait apparaître un diagramme assez flou d'alumine, superposé à une diffusion générale. En bain phosphorique au contraire, on obtient un intense diagramme d'aluminium présentant des orientations accentuées, dues sans doute à la structure même de la tôle laminée.

Pour le cuivre, le témoin ayant toujours une structure superficielle amorphe, le bain phosphorique ou bien conserve la structure amorphe, ou bien fait apparaître la structure microcristalline non orientée du cuivre, avec parfois la présence d'oxyde, ce qui confirme certains résultats de F. J. Taboury ([1]).

Le polissage électrolytique a donc pour effet général de faire disparaître plus ou moins complètement la couche de Beilby, suivant la durée de l'opération. Le métal sous-jacent réapparaît avec sa structure particulière, ainsi que les oxydes qui prennent naissance. La nature du bain paraît jouer un rôle important dans le cas de l'aluminium, métal particulièrement oxydable; enfin, l'hétérogénéité de structure, constatée par l'examen systématique de chaque point des échantillons, paraît être, dans les cas que nous avons étudiés, une règle générale.

OPTIQUE. — *Sur l'anisotropie optique superficielle des surfaces réfléchissantes striées.* Note ([1]) de M. **Jacques Farran**, présentée par M. Charles Mauguin.

L'anisotropie superficielle des sections réfléchissantes striées par un abrasif fin a été décrite et expliquée par L. Capdecomme ([2]). Nous avons repris cette étude afin de savoir si l'abrasion donnait lieu à des phénomènes optiques définis et reproductibles, susceptibles d'être reliés aux constantes physiques.

Jusqu'ici, nous avons travaillé sur l'aluminiun, le cuivre, le cadmium, l'acier inoxydable V_2A et le chrome.

Pour nous affranchir de l'état de surface préalable, nous avons soumis au polissage anodique les sections altérables ou écrouissables (Al, Cu, Cd, acier V_2A). Cr seul a été traité par simple polissage mécanique.

Comme abrasifs, nous avons employé des alumines fines calibrées et une série de papiers potée. Les alumines étaient utilisées dans l'alcool pour éviter l'oxydation. Les papiers étaient paraffinés afin d'empêcher la fixation des grains d'abrasif par les métaux mous.

Nous avons formé les réseaux de stries d'orientation bien définie, en guidant la section par une réglette au cours de ses passages sur les abrasifs. La pression à exercer pour produire les sillons est d'autant plus faible que le

---

([1]) Séance du 9 avril 1947.

([2]) *Bull. Soc. fr. Min.*, 63, 1940, pp. 57 à 63.

métal est plus mou. Il est nuisible de multiplier les passages au point de provoquer un échauffement de la surface et par conséquent une oxydation.

Résultats. — Nous avons constaté en premier lieu que la pression exercée agit peu sur les anisotropies mesurées ([3]), pourvu qu'elle suffise pour produire les stries.

Avec un abrasif donné et une substance définie, nous avons généralement retrouvé des valeurs de l'anisotropie ρ concordant à moins de 2 % près. Parmi les métaux que nous avons étudiés, le cuivre, seul, a fait exception et donné des écarts plus considérables, pouvant atteindre de 15 à 20 %. L'explication doit être recherchée dans la grande facilité d'altération de ce métal et dans la diversité d'oxydes et de sulfures susceptibles d'en recouvrir la surface.

Pour chaque métal, l'anisotropie augmente en même temps que la grosseur des grains de l'abrasif.

Celle des métaux plastiques, Al, Cd, Cu, acier V_2A, montre une croissance rapide et régulière avec les alumines fines et tend asymptotiquement vers une valeur limite avec les abrasifs plus grossiers :

	Al.	Cd.	Cu.	V_2A.
ρ	2,05	1,9	1,7	1,55

Le chrome, par contre, a montré un accroissement très lent de l'anisotropie avec les abrasifs fins et une élévation beaucoup plus rapide avec des émeris plus grossiers que le n° 1. Son anisotropie reste cependant toujours très inférieure à celle des métaux mous.

Nous avons constaté, avec les métaux étudiés, que l'anisotropie limite, et aussi les anisotropies relatives à chaque finesse d'abrasif se classent comme les duretés. Il serait, en fait, possible de définir ces duretés par les tangentes à l'origine des courbes réalisées en portant l'anisotropie optique en ordonnées et la grosseur des grains d'abrasif fins en ordonnées.

L'allure de la courbe relative au chrome, ainsi que les valeurs trouvées pour l'anisotropie, s'accordent avec la formule approchée $\rho = 1 + 4i^2/N$ qui se déduit des lois de la réflexion oblique et où i est l'angle d'incidence et N la fonction $(\nu^2 + \chi^2)/\nu$ des indices d'extinction χ et de réfraction ν de la substance ([4]).

Les anisotropies élevées observées pour les autres métaux ne peuvent s'expliquer par la même formule que si l'on admet deux ou plusieurs réflexions successives à l'intérieur des stries.

Ces réflexions multiples impliquent l'existence de sillons à bords très inclinés. Les métaux mous et plastiques se prêtent évidemment mieux à

([3]) Nous appelons *anisotropie de réflexion* ρ, le rapport R_1/R_2 du plus grand au plus petit des pouvoirs réflecteurs de la section éclairée normalement en lumière rectilignement polarisée.

([4]) L. Capdecomme, *Bull. Soc. fr. Min.*, **61**, 1938, p. 71.

l'obtention de tels profils que les métaux durs et peu plastiques qui éclatent sous l'action de l'abrasif.

Nous avons pu étayer cette explication en observant la diminution brusque subie par l'anisotropie des surfaces d'aluminium ou de cuivre striées, quand on les soumet pendant quelques secondes à un polissage anodique susceptible seulement d'arrondir les crêtes sans changer la topographie générale de la surface.

OPTIQUE. — *Sur le pouvoir réflecteur sélectif des plaques interférentielles Lippmann et leur emploi dans des monochromateurs.* Note de MM. **Antoine Merland** et **Pierre Schonne**, présentée par M. Aimé Cotton.

Un des moyens d'obtenir de la lumière monochromatique consiste à utiliser la réflection sélective sur une plaque interférentielle Lippmann [1] impressionnée avec une radiation homogène. Ce procédé a été notamment décrit par Herbert E. Ives [2].

Pour comparer la luminosité et la sélectivité d'un monochromateur construit avec ces plaques, à celles des monochromateurs usuels et pour exprimer ces comparaisons par des nombres, il nous a semblé utile de mesurer le pouvoir reflecteur sélectif de plaques Lippmann. La présente Note a pour objet de faire connaître le résultat de ces mesures.

Nous avons employé la méthode de mesure suivante. La plaque Lippmann était placée verticalement dans une cuve à faces parallèles en verre, remplie de benzène. Le plan de la plaque faisait un angle de quelques degrés avec la face de la cuve en regard, de manière à séparer le faisceau réfléchi sur la plaque. La cuve était montée normalement au plan d'un cercle divisé et éclairée par un faisceau parallèle de lumière blanche. La lumière réfléchie était reçue sur la fente ($0^{mm},1$) d'un petit spectrographe assez dispersif (10 Å par millimètre sur le plan focal). Sur la plaque spectrographique on enregistrait, côte à côte :

1° l'image spectrale due à la lumière réfléchie sur la face antérieure (air-verre) de la cuve; 2° après rotation de la cuve, l'image des rayons réfléchis sur la plaque Lippmann, avec la même durée de pose; 3° un spectre de raies de comparaison.

Dans le deuxième cas, on compensait l'effet du prisme liquide sur la définition géométrique du faisceau réfléchi par un petit prisme en crown.

On a refait les mesures pour plusieurs incidences sur la plaque. Après développement, suivant les précautions habituelles [3], les photographies des

---

(1) *Comptes rendus*, **112**, 1891, p. 274.

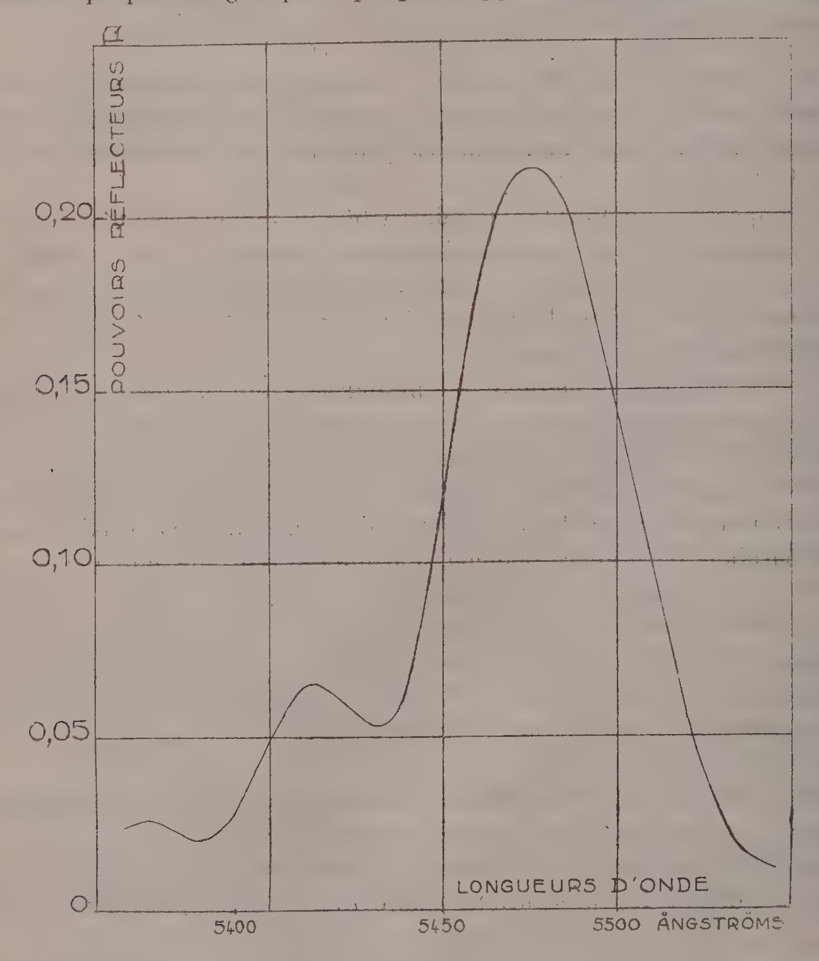
(2) *The Astrophys. Journal*, 28, 1908, p. 325, et *Journ. of the Optic. Soc. of America*, **1**, 1917, p. 49.

(3) C. Jausseran, *Ann. de Phys.*, 5, 1936, p. 355.

spectres étaient analysées au microphotomètre enregistreur. Pour chaque longueur d'onde on obtenait donc, d'une part, la fraction de la lumière incidente réfléchie sur le verre et, d'autre part, la fraction réfléchie sur la plaque Lippman. La première pouvait être connue avec une bonne précision par les formules de Fresnel; la deuxième s'en déduisait par comparaison des ordonnées correspondantes des microphotogrammes.

Résultats. — 1° Pour toutes les plaques Lippmann préparées, le pouvoir réflecteur a été trouvé plus grand quand la lumière incidente arrive sur le coté gélatine de la plaque.

2° On a préparé un groupe de plaques Lippmann à faible épaisseur de gélatine (7 μ), impressionnées durant 1 minute par une lampe à vapeur de sodium placée à 20^{cm}, développées à l'acide pyrogallique, puis traitées par le bichlorure de mercure et l'amidol. Le pouvoir réflecteur maximum atteint seulement 0,065, à $\lambda = 5583$ Å, pour un angle d'incidence de 8°30′. La *largeur de bande*,



c'est-à-dire l'écart des longueurs d'onde pour lesquelles le pouvoir réflecteur vaut la moitié du pouvoir réflecteur maximum est de 126 Å.

3° On a préparé un autre groupe de plaques à plus grande épaisseur de gélatine (33 μ d'après la masse coulée). Elles ont été impressionnées avec la lumière d'un arc au mercure Gallois (110 volts, 2,1 ampères), filtrée par un écran Wratten 77 A pour isoler la raie verte. L'arc était placé à 1^m de la plaque et la durée de pose était de 15 minutes. Le développement a été fait à l'hydroquinone et les plaques traitées, après fixage, au bichlorure de mercure. Le pouvoir réflecteur est alors beaucoup plus grand : plus de 0,21 au maximum. La figure ci-contre se rapporte à l'une de ces plaques. La largeur de bande est de 60 Å. L'incidence était de 12°. Cette plaque a montré un spectre cannelé, dont on voit la manifestation sur la courbe. L'examen des cannelures semble indiquer qu'il s'agit d'interférences dues aux vibrations hors série qui se réfléchissent sur les faces avant et arrière de la gélatine. L'épaisseur de la couche déduite de la place des cannelures est de 32 μ, en bon accord avec l'évaluation qui précède.

Nous ferons connaître prochainement le résultat d'études comparées entre des monochromateurs à plaques Lippmann, des monochromateurs à prismes et des monochromateurs mixtes.

RADIOCHIMIE. — *Sur la mise en évidence d'une réaction d'échange entre le brome libre et le tribromure d'antimoine.* Note [1] de M. **Roland Muxart.**

Nous avons étudié la possibilité d'une réaction d'échange entre le brome libre et le tribromure d'antimoine.

Le bromure d'antimoine était préparé par action directe du brome sur l'antimoine.

1. *Étude du système* $Br_2^*.Br_3Sb$. — Par une technique [2] rappelant celle utilisée déjà dans l'étude de l'échange $Br_2.Br_4Se$, nous avons observé un échange complet entre le radio-brome et le tribromure d'antimoine dissous dans du sulfure de carbone.

Le tableau suivant précise le résultat des mesures.

	Poids (en mg).	Activités (coups/mn).	Activités spécifiques.
Premier essai.			
Br_2^* étalon	102	1190	11,5
Br_2^* échangé	100	379	3,79
Br_3Sb	102	467	4,5
Deuxième essai.			
Br_2^* étalon	114	2382	20,8
Br_2^* échangé	109	1278	11,7
Br_3Sb	109	1409	12,9

(1) Séance du 9 avril 1947.

(2) St. Priest, Sautreau, Muxart, P. et R. Daudel, *Experientia* (sous presse).

La durée du contact était d'environ 1 heure à la température de 50° C.

2. *Étude du système* $Br_2 . Br^*_3Sb$. — A titre de contre-épreuve, nous avons réalisé l'expérience complémentaire; celle-ci a confirmé les résultats précédents.

Le tableau suivant précise le résultat des mesures.

	Poids (en mg).	Activités (coups/mn).	Activités spécifiques.
Premier essai.			
Br^*_3Sb étalon	85	2025	23,27
Br^*_3Sb échangé	27	445	16,5
Br_2	100	945	9,45
Deuxième essai.			
Br^*_3Sb étalon	103	530	5,14
Br^*_3Sb échangé	104	186	1,79
Br_2	103	220	2,13

En conclusion, il y a échange complet d'atomes de brome entre Br_2 *et* Br_3Sb *en solution dans* CS_2, *à la température de* 50° C. *en moins d'une heure.*

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Dosage colorimétrique du calcium en présence d'un grand excès de magnésium.* Note de M. **Émile Rinck** et Mlle **Hélène Ostertag**, présentée par M. Louis Hackspill.

A. Astruc, M. Mousseron et Mlle N. Bouissou (1) ont mis au point une méthode de microdosage du calcium, basée sur la détermination colorimétrique de l'acide tungstique combiné au calcium lors de la formation du tungstate de calcium insoluble. Cette méthode est longue puisqu'elle nécessite l'isolement de WO_4Ca, puis celui de l'acide tungstique qu'il contient; cet acide est redissous sous forme de WO_4Na_2, acidulé par ClH et réduit par le chlorure titaneux. La coloration bleue obtenue est comparée à celle d'une solution étalon de teneur voisine dans un colorimètre de Dubosq.

H. Beutelspacher (2) a montré qu'il était plus simple de précipiter le tungstate de calcium à l'aide d'une quantité connue de WO_4Na_2; après centrifugation, la fraction de tungstate de sodium non utilisée est déterminée colorimétriquement. La présence d'alcalins et de magnésium ne gênerait pas la précipitation de WO_4Ca en raison de la solubilité des tungstates correspondants.

Dans ces conditions nous avons pensé pouvoir utiliser cette méthode pour doser de faibles quantités de calcium (inférieures au milligramme) en présence

(1) *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 376.
(2) *Z. anal. Ch.*, **96**, 1934, p. 161.

d'un grand excès de magnésium. Malheureusement nous avons dû constater que dans ce cas la méthode de Beutelspacher donnait des résultats très erronnés, même en respectant minutieusement les prescriptions de l'auteur. De même, en dosant des solutions de calcium exemptes de magnésium, les erreurs observées ont largement dépassé les 3 % indiqués par Beutelspacher.

Une étude systématique de cette méthode nous a montré que ces erreurs sont dues à la formation de paratungstates doubles de sodium et de magnésium, insolubles dans l'eau. La formation de ces composés est empêchée si l'on évite d'évaporer à sec la solution à précipiter ainsi que l'avait recommandé Beutelspacher. De plus, cette solution ne doit pas contenir des quantités appréciables de chlorure d'ammonium sous peine d'obtenir des solutions grisâtres au moment de la réduction par Cl_3Ti.

Mode opératoire. — La solution à doser ne renfermant pas plus que 1^{mg} de Ca^{++} et moins que 500 fois son équivalent de Mg^{++}, est neutralisée avec du carbonate de sodium, en évitant la précipitation de sel basique. Additionnée de 2$^{cm^3}$,5 d'une solution de tungstate de sodium à 5^{g},2435 de WO_4Na_2, $2H_2O$ par litre (1$^{cm^3}$ de cette solution correspond à 1^{mg} de CaO), elle est chauffée pendant une heure au bain-marie. La solution est évaporée à un très faible volume (de l'ordre du cm^3), mais il faut absolument éviter de l'évaporer à sec. Après une heure de chauffe, le précipité de WO_4Ca, très adhérent, est mis en suspension dans la liqueur en frottant les parois du verre avec une spatule en caoutchouc, puis le tout est transvasé dans un ballon jaugé de 25$^{cm^3}$. Après centrifugation on prélève 5$^{cm^3}$ de la solution limpide, on leur ajoute 1$^{cm^3}$ de ClH n/10, puis 5$^{cm^3}$ de Cl_3Ti, dont 1$^{cm^3}$ correspond exactement à 2^{mg} de fer. La teinte de la solution bleue obtenue est comparée à celle d'une liqueur-témoin, préparée de la même façon avec 5$^{cm^3}$ d'une solution de WO_4Na_2 dont 1$^{cm^3}$ correspond à 0^{mg},1 de CaO.

Nous avons effectué cette comparaison dans un colorimètre à cellules photoélectriques, étalonné avec des solutions de tungstate de sodium de titre connu. La courbe d'étalonnage est reproductible avec une précision de l'ordre du millième. Les très nombreuses analyses que nous avons effectuées nous ont permis de doser des concentrations de calcium comprises entre 1 et 50 γ/cm^3 avec une précision de l'ordre de 1 %. La concentration des ions Mg^{++} peut être jusqu'à 500 fois celle des ions de Ca^{++}, sans que les résultats en soient affectés. Un excès plus grand conduit à des résultats défectueux parce que le pH des solutions de Mg plus concentrées devient incompatible avec l'existence du tungstate de calcium. De plus, on est limité par la solubilité du tungstate de magnésium à froid. Voici quelques résultats :

Ca théorique en γ/cm³.	Rapport Mg/Ca.	Méthode Beutelspacher. Ca trouvé en γ/cm³.	Nouvelle méthode. Ca trouvé en γ/cm³.
10,04	0	11,3 14,0	9,8 10,3
20,07	0	19,5 à 24,8	20,2 20,5
40,14	0	42,8 43,0	40,0 40,2
20,07	1	23,0 23,8	20,2 20,4
20,07	10	22,5 24,0	19,9 20,7
20,07	50	20,3 à 27,5	
20,07	100		19,9 20,6
20,07	200	28,5 48,0	19,8 20,1
20,07	500	11,0 à 51,5	19,8 20,0
4,01	100		4,0
12,04	100		12,1
16,05	100		16,0
28,09	100		28,0
36,13	100		36,1
40,14	100		40,25

CHIMIE MINÉRALE. — *Recherches sur la formation des oxydes d'azote au cours de la distillation de la houille.* Note (1) de Mme **Françoise Plotegher**, présentée par M. Paul Pascal.

Nous avons vu dans une précédente étude (2) l'influence de l'air et de la température, au cours de la distillation de la houille aux basses températures, sur la formation du bioxyde d'azote. Nous avons poursuivi ces recherches avec le même appareillage, en modifiant le système de chauffage. Nous avons pu atteindre 1200°.

Nous avons donc distillé, dans les mêmes conditions de pression normale à l'intérieur de la cornue et à 900, 950, 1000, 1100 et 1200°, 500g de charbon. Nous avons effectué le dosage du NO comme précédemment suivant la méthode de Griess : solution acidifiée d'acide sulfanilique et d'α-naphtylamine. Nous avons obtenu les résultats suivants :

1° *Sans entrée d'air.* — Aucune trace de NO.

2° *Avec* 650cm³ *d'air.* — Le virage n'est pas suffisamment net pour apprécier les quantités de NO formé.

3° *Avec* 1400cm³ *d'air.* — Virage sensible donnant les résultats suivants :

T° C. de distillation...	900.	950.	1000.	1100.	1200.
Teneur en mg/m³......	0,0086	0,0074	0,0064	0,0052	inappréciable

(1) Séance du 23 décembre 1946.

(2) *Comptes rendus*, **221**, 1945, pp. 502-505.

Nous résumons tous nos résultats sur la courbe I ci-dessous. Il apparaît donc un maximum à 900°. (Trois expériences vérifièrent ce résultat à 10^{-3} mg près.)

Nous avons voulu vérifier l'allure de cette courbe en augmentant la quantité d'air envoyée dans la cornue afin de travailler sur des quantités plus appréciables de NO.

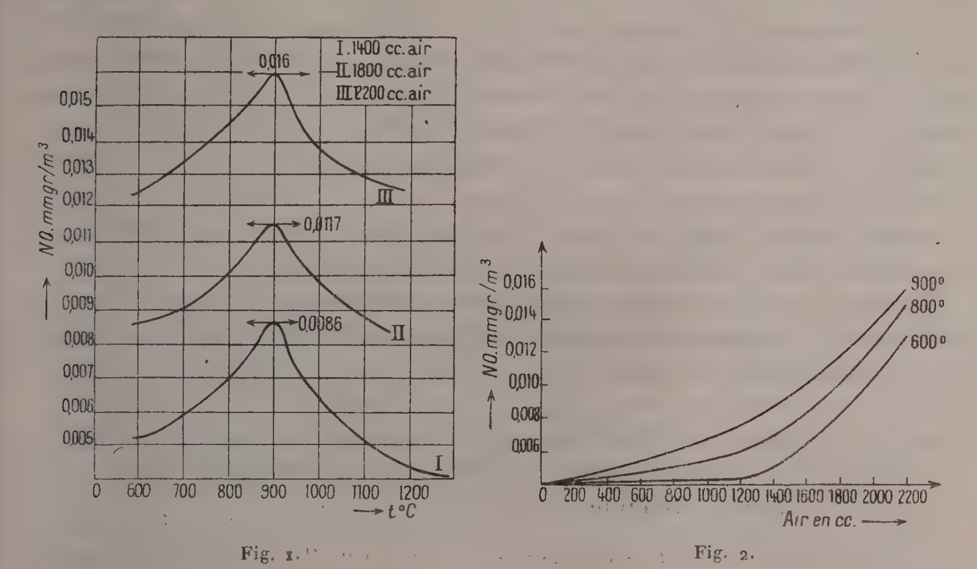


Fig. 1. Fig. 2.

Voici, avec 1800 et 2200$^{cm^3}$ d'air, les résultats obtenus. Nous les retrouvons sur le graphique en II et III.

T°C		600.	800.	900.	950.	1000.	1100.	1200.
Air	1800	0,0087	0,0102	0,0117	–	0,0101	0,0089	–
	2200	0,0125	0,0144	0,016	0,0148	0,0138	0,0131	0,0126

Le pouvoir calorifique du gaz émis à chaque distillation a donné des résultats très convenables. L'analyse du gaz effectuée à chaque expérience a présenté une augmentation de la proportion d'oxygène aux hautes températures.

Il est à remarquer, du point de vue pratique et industriel, que, dans une usine où les cornues sont tout d'abord en parfait état, sans fissure, et où l'on distille à 1000°, 1100° et 1200° sur les parois, il n'y a aucune trace d'oxyde d'azote, et que dans une autre beaucoup plus ancienne, où les cornues sont très abîmées et où l'on ne peut de ce fait dépasser 900 à 950°, l'existence des gommes a été mise en évidence.

On pourrait donc faire un rapprochement entre nos résultats et cette constatation pratique.

Nous nous sommes proposé d'expliquer cette anomalie. Nous avions d'abord supposé que ceci était dû soit à la dissociation du NO soit à l'oxydation du NO en NO_2.

1° *Hypothèse de la dissociation.* — NO ne se dissocie pas à chaud; il se forme d'autant plus que la température est plus élevée, en vertu du principe de Le Chatelier. Sa dissociation se manifeste donc d'autant moins que la température est plus élevée, car la réaction $2NO \rightarrow N_2 + O_2$ est exothermique entre 500 et 1500°.

2° *Hypothèse de la formation de* NO_2. — Au détriment de l'excès de O_2, le NO_2 se formerait dans la cornue et se trouverait arrêté dans le barillet où le gaz barbote en déposant ses eaux ammoniacales. Nous les avons donc toutes recueillies et nous avons essayé de déceler la présence de ce peroxyde d'azote, d'abord du point de vue qualitatif et comme vérification du point de vue quantitatif. Absolument aucune trace n'apparut.

Il reste donc à croire que cette diminution de NO avec l'augmentation de température serait due à la combustion du charbon dans le NO.

En résumé nous pourrons dire que la proportion en oxyde d'azote du gaz de distillation de la houille augmente toujours avec la quantité d'air envoyé (voir courbe ci-dessus) dans la cornue, mais qu'elle est maximum à 900°.

MÉTALLOGRAPHIE. — *Sur l'anisotropie optique des siliciures de fer, de manganèse et de nickel.* Note [1] de M. **Théophile Cambon**, présentée par M. Charles Mauguin.

I. Fer-silicium [2]. — Les alliages Fe-Si montrent : 1° une solution solide α de Si dans Fe, cubique; 2° une combinaison définie η ($Si_2\,Fe_3$), hexagonale; 3° une combinaison définie ε (SiFe) cubique; 4° une combinaison définie θ ($Si_5\,Fi_2$) quadratique.

L'anisotropie optique de la phase θ a été précisée par L. Capdecomme [3].

La méthode des coupes perpendiculaires nous a permis de déterminer l'ensemble des caractères optiques de la phase η.

Caractères observés — Cristaux uniaxes optiquement négatifs; rotations maxima ω_M de l'ordre de 2°; anisotropie variant en sens inverse de la longueur d'onde; teintes allant du blanc jaunâtre au gris bleuté.

II. Manganèse-silicium [1]. — Les alliages Mn-Si comportent : 1° une solution solide α de Si dans Mn, cubique; 2° une combinaison définie β (Mn_2Si), hexagonale; 3° une combinaison définie γ (MnSi), cubique; 4° une combinaison définie δ ($MnSi_2$), hexagonale.

Caractères des diverses phases optiquement anisotropes : 1° Phase β (Mn_2Si). — Divers échantillons dont la composition variait de 22 à 34 % Si ont montré les deux phases β et γ juxtaposées. MnSi, optiquement isotrope, apparaît généralement en grains à sections triangulaires, ce qui confirme sa symétrie

---

(1) Séance du 9 avril 1947.

(2) P. Pascal, *Traité de Chimie minérale*, **12**, 1934.

(3) *Métaux, corrosion, usure*, **16**, 1941, pp. 83-84.

cubique tétraédrique, Mn_2Si se présente ordinairement sous forme de prismes allongés suivant l'axe principal, car les sections normales à la direction d'allongement sont isotropes et ont fréquemment un contour hexagonal. Ces sections prismatiques, à extinctions toujours droites, indiquent par la normale à leur allongement le pouvoir réflecteur principal R_0 du cristal.

Caractères observés. — Cristaux uniaxes optiquement négatifs; rotations maxima ω_M de l'ordre de 1°; anisotropie variant en sens inverse de la longueur d'onde; teintes allant du blanc au gris bleuté.

2° Phase δ ($MnSi_2$), Nous l'avons étudiée sous forme de grains arrondis et l'ensemble de ses caractéres optiques a été précisé en utilisant la méthode des coupes perpendiculaires.

Caractères observés. — Cristaux uniaxes optiquement négatifs; rotations maxima ω_M de l'ordre de 2°; anisotropie variant en sens inverse de la longueur d'onde; teintes vives allant du jaune orangé au bleu.

III. Nickel-Silicium ([2]). — Les alliages Ni-Si montrent : 1° une phase α solution solide de Si dans Ni, cubique; 2° une combinaison définie θ (Ni_3Si) formée par réaction péritectique à 1125° à partir des phases α et β; 3° une combinaison définie β (Ni_2Si); 4° une combinaison définie ε (Ni_3Si_2) formée par réaction péritectique à 840° à partir des phases β et γ; 5° une combinaison définie γ (Ni Si), cubique; 6° une combinaison définie δ ($NiSi_2$).

Nous n'avons pas trouvé dans la bibliographie la symétrie de ces différentes phases. Leur étude optique nous a montré que quatre d'entre elles sont anisotropes, et nous donnons ci-après leurs caractères optiques :

1° Phase θ (Ni_3Si). Elle s'est présentée en lamelles à plan d'aplatissement isotrope, ce qui indique un composé uniaxe étalé suivant sa base *p*.

Caractères observés. — Cristaux uniaxes optiquement négatifs; rotations maxima ω_M de l'ordre de 0°,5; anisotropie variant en sens inverse de la longueur d'onde; teintes allant du jaune au gris bleu.

2° Phase β (Ni_2Si). Nous l'avons observée sous forme de grains arrondis et nous avons obtenu par un emploi systématique des coupes perpendiculaires une section isotrope unique dans le cristal, ce qui indique encore une symétrie à axe principal.

Caractères observés. — Cristaux optiquement uniaxes et négatifs; rotations maxima ω_M de l'ordre de 1°; anisotropie croissant dans le même sens que la longueur d'onde; teintes vives allant du rouge violacé au vert bleu.

3° Phase ε (Ni_3Si_2). Elle apparaît sous forme de grains arrondis très faiblement anisotropes. La méthode des coupes perpendiculaires indique encore un composé à axe principal.

Caractères observés. — Cristal optiquement uniaxe et négatif; rotations maxima ω_M inférieures à 0°,5; anisotropie croissant dans le même sens que la longueur d'onde; teintes allant du rose au vert bleu.

4° Phase δ ($NiSi_2$). Ce composé se présente sous la forme de prismes orthorhombiques allongés suivant *m* et montrant des clivages *m*. Nous avons déterminé l'ensemble des caractères optiques en taillant une section normale aux allongements, ce qui donne un plan *p*, à partir duquel nous avons obtenu, grâce aux traces de clivages *m*, les deux sections g^1 et h^1.

Caractères observés. — *a*. Sur le plan *p* (001); rotations maxima ω_M de l'ordre de 0°,5; anisotropie croissant dans le même sens que la longueur d'onde; teintes allant du vert bleu au rouge violacé.

b. Sur le plan g^1 (010); rotations maxima ω_M de l'ordre de 1°,5; anisotropie croissant dans le même sens que la longueur d'onde; teintes allant du vert bleu au jaune orangé.

c. Sur le plan h^1 (100); rotations maxima ω_M de l'ordre de 1°; anisotropie croissant dans le même sens que la longueur d'onde; teintes allant du bleu au jaune brun.

La répartition de R_g, R_p, R_m suivant les axes principaux est la suivante: R_p suivant *a*, R_m suivant *b* et R_g suivant *c*.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Stéréochimie du cycle tétrahydropyrannique.* Note [1] de MM. **Raymond Cornubert** et **Jacques Viriot**, présentée par M. Marcel Delépine.

« Que le noyau hexagonal tétrahydropyrannique se développe dans deux plans, est une chose indubitable », ainsi s'expriment Allen et Hibbert [2] en s'appuyant sur des mesures de moments électriques. S'il en est ainsi, et en admettant que le cycle soit rigide, il doit exister plus de deux dérivés disubstitués sur atomes de carbone différents. C'est ce que nous avons entrepris de vérifier; nous rendons compte ici de nos premières expériences sur ce sujet.

Nous avons tout d'abord étudié les αα'-dibenzyltétrahydropyrannones (I); nos expériences sont résumées dans le graphique ci-après.

Dans l'ensemble, on trouve donc une similitude très poussée avec les αα'-dibenzylcyclohexanones [3]; le corps F 124° est l'isomère *cis*, le corps F 72° est l'isomère *trans*.

B. L'hydrogénation de la ββ'-diméthylpyrannone par le nickel de Raney a donné, d'une part le ββ'-diméthyltétrahydropyrannol $É_{20}$ 96-97° (R^t 44 %, phényluréthane F 136°), d'autre part l'heptanediol-2.4 $É_{20}$ 120-122° (R^t 14 %,

(1) Séance du 31 mars 1947.

(2) *J. Amer. Chem. Soc.*, **56**, 1934, p. 1398.

(3) R. Cornubert, M. André et M. de Demo, *Bull. Soc. Chim.*, 6, 5e série, 1939, p. 113; R. Cornubert, P. Anziani et M. Descharmes, *Comptes rendus*, **223**, 1946, p. 358.

diphényluréthane F 122°) (III).

$C_6H_5—CH=$ [cycle O, CO] $=CH—C_6H_5$ .... F. 186°

$C_6H_5—CH_2—$ [cycle O, CO] $—CH_2—C_6H_5$ .... F. 124° (70 %) ← (f) F. 72° (10 %)

$C_6H_5—CH_2—$ [cycle O, CHOH] $—CH_2—C_6H_5$ .... F. 127° F. 198° F. 82°

$C_6H_{11}—CH_2—$ [cycle O, CHOH] $—CH_2—C_6H_{11}$ .... F. 117° F. 152°

(I).

(*a*) Ni de Raney; (*b*) isopropylate d'aluminium; (*c*) Na + éther humide; ne donnent que des traces; (*d*) platine acétique; (*e*) oxydation sulfochromique; (*f*) acide chlorhydrique dilué et froid.

La ββ'-diméthyltétrahydropyrannone pure (II) obtenue par oxydation chromique de l'alcool précédent, conversion en oxime et hydrolyse de cette dernière, a été soumise à diverses réductions : *a*. par le sodium et l'éther

(II) : O, $CH_3—$, $—CH_3$, CO — (III) : $CH_3—CHOH$, $CH_2—CH_3$, CHOH — (IV) : O, $C_6H_5—$, $—C_6H_5$, CO — (V) : $C_6H_5—CH_2$, $CH_2—C_6H_5$, CHOH

humide, elle a donné le précédent alcool de phényluréthane F 136°, mais à l'état solide (F 47-48°); *b*. par le nickel de Raney et le platine acétique, elle a engendré un alcool de moindre point de fusion (Ni, 30-35°; Pt, 28-35°) qui a permis d'isoler une grande quantité de phényluréthane F 136° à côté d'une petite quantité d'un autre phényluréthane F 106-108°; *c*. par l'isopropylate d'aluminium, on a trouvé l'alcool de phényluréthane F 136°.

Si l'on tient compte de la grande analogie qui se manifeste entre les αα'-dibenzylcyclohexanones et les αα'-dibenzyltétrahydropyrannones, et qu'on se rappelle que les cyclanones portant une substitution tant en β qu'en β' existent en stéréoisomères distincts, on arrive à cette conclusion que la ββ'-diméthyltétrahydropyrannone étudiée doit être l'isomère *cis* tout comme la ββ'-diméthylcyclohexanone récemment examinée ([4]).

([4]) R. CORNUBERT, R. ANDRÉ et P. HARTMANN, *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 1505.

c. Quant aux ββ'-diphényltétrahydropyrannones (IV) précédemment isolées par l'un de nous ([5]) F 131° et F 76°, elles ont donné lieu aux observations suivantes. L'isomère F 131° par hydrogénation au nickel de Raney préparé d'après la technique indiquée par MM. Delépine et Horeau ([6]), a fourni le ββ'-diphényltétrahydropyrannol F 146° et le dibenzylisopropanol F 47-48° V, ce dernier provenant de l'hydrogénation de la dibenzylidèneacétone engendrée aux dépens de la ββ'-diphényltétrahydropyrannone (IV) sous l'influence de l'alcali restant dans le nickel. De fait, en prenant un nickel neutralisé à l'acide acétique, nous n'avons plus retrouvé de dibenzylisopropanol. L'isomère F 76°, par le nickel de Raney neutralisé, conduit à un produit de réduction qui a été péniblement divisé en deux ββ'-diphényltétrahydropyrannols F 106-107° et 101-102° (mélange F 89-92°); il serait donc l'isomère *cis*.

Dans l'état actuel de ces recherches, les phénomènes stéréochimiques apparaissent compatibles avec la représentation plane du noyau tétrahydropyrannique.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Sur quelques nouvelles aldimines.*

Note ([1]) de M. **René Tiollais**, présentée par M. Marcel Delépine.

J'ai pu préparer par l'action d'un aldéhyde sur une amine primaire, en utilisant des produits purs et secs, un certain nombre d'aldimines qui n'avaient pas encore été signalées dans la littérature chimique.

Le tableau ci-contre donne la formule, la température d'ébullition sous une pression donnée, la densité à 0° prise par rapport à l'eau à 4°, la densité à t° par rapport à l'eau à 4°, l'indice de réfraction n_D^t pour la raie D du sodium à la température t, la réfraction moléculaire mesurée R.m., la réfraction calculée avec les incréments d'Eisenlohr sans la valeur de la double liaison C=N et l'exaltation due à cette double liaison.

Il ressort que :

1° *Pour les aldimines dérivées d'aldéhydes et d'alcoylamines saturés :*

a. Les points d'ébullition augmentent de 25° environ d'un terme à l'homologue supérieur.

b. Les isomères à chaîne linéaire ont sensiblement le même point d'ébullition. Cette remarque est valable pour les isomères ayant les mêmes ramifications.

c. Pour les aldimines ayant une seule ramification, le point d'ébullition est inférieur de 12° environ à celui trouvé pour l'isomère non ramifié; s'il y a deux ramifications, l'abaissement est de 25° environ.

([5]) R. Cornubert et P. Robinet, *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, 1, 1934, p. 90.

([6]) *Bull. Soc. Chim.*, 5e série, 4, 1937, p. 32.

([1]) Séance du 31 mars 1947.

Formules.		Eb (pression).	d_4^0.	d_4^t.	n_D^t.	R_m trouvée.	R_m calc. (*).	Exaltation C=N.
Aldimines dérivées des aldéhydes saturés et des amines saturées acycliques.								
$_3.CH{:}N.CH(CH_3)_2$	$C_5H_{11}N$.	58-59° (754)	0,7375	0,7232 (14°)	1,3963	28,30	27,03	1,27
$_3.CH{:}N.(CH_2)_3.CH_3$	$C_6H_{13}N$.	102 (747)	0,7712	0,7579 (14)	1,4162	32,84	31,648	1,192
$H_5.CH{:}N.CH(CH_3)(C_2H_5)$	$C_7H_{15}N$.	111 (770)	0,7622	0,7417 (22,5)	1,4098	37,79	36,266	1,524
$H_7.CH{:}N.CH(CH_3)_2$	$C_7H_{15}N$.	112 (770)	0,7569	0,7378 (22)	1,4070	37,76	36,266	1,494
$H_3)_2CH.CH{:}N.CH(CH_3)_2$	$C_7H_{15}N$.	100 (760)	0,7466	0,7341 (13,5)	1,4064	37,90	36,266	1,634
$H_5.CH{:}N.(CH_2)_2.CH(CH_3)_2$	$C_8H_{17}N$.	143 (769)	0,7841	0,7718 (14,5)	1,4265	42,27	40,884	1,386
$H_3)_2CH.CH{:}N.CH(CH_3)(C_2H_5)$	$C_8H_{17}N$.	124-125 (772)	0,7602	0,7416 (21)	1,4102	42,51	40,884	1,626
$_3.(CH_2)_5.CH{:}N.CH_3$	$C_8H_{17}N$.	160 (772)	0,7938	0,7811 (14)	1,4324	42,27	40,884	1,386
$H_7.CH{:}N.(CH_2)_2.CH(CH_3)_2$	$C_9H_{19}N$.	166 (772)	0,7867	0,7743 (15)	1,4297	47,09	45,502	1,588
$_3.(CH_2)_5.CH{:}N.C_2H_5$	$C_9H_{19}N$.	175 (770)	0,7891	0,7781 (14)	1,4316	47,04	45,502	1,538
$_3.(CH_2)_6.CH{:}N.C_2H_5$	$C_{10}H_{21}N$.	89 (21)	0,7977	0,7818 (21)	1,4317	51,46	50,12	1,34
$_3.(CH_2)_7.CH{:}N.CH_3$	$C_{10}H_{21}N$.	94 (22)	0,8080	0,7955 (15,5)	1,4397	51,40	50,12	1,28
$_3.(CH_2)_8.CH{:}N.CH_3$	$C_{11}H_{23}N$.	103 (14)	0,8116	0,7978 (17,5)	1,4412	56,05	54,738	1,312
$_3.(CH_2)_8.CH(CH_3).CH{:}N.CH_3$	$C_{13}H_{27}N$.	122 (14)	0,8145	0,8018 (17,5)	1,4448	65,47	63,974	1,496
Aldimines dérivées d'aldéhydes saturés et d'amine éthylénique ou d'aldéhyde éthylénique et d'amines saturées.								
$H_7.CH{:}N.CH_2.CH{:}CH_2$	$C_7H_{13}N$.	128 (773)	0,7968	0,7813 (17,5)	1,4352	37,14	35,799	1,341
$H_3)_2CH.CH{:}N.CH_2.CH{:}CH_2$	$C_7H_{13}N$.	117 (767)	0,7880	0,7756 (14)	1,4327	37,22	35,799	1,421
$_3.(CH_2)_5.CH{:}N.CH_2.CH{:}CH_2$	$C_{10}H_{19}N$.	86 (20)	0,8144	0,7961 (22,5)	1,4444	51,17	49,653	1,517
$_3.CH{:}CH.CH{:}N.(CH_2)_2.CH_3$	$C_7H_{13}N$.	137-138 (760)	0,8007	0,7895 (12)	1,4653	38,95	35,799	3,151
$_3.CH{:}CH.CH{:}N.CH(CH_3)_2$	$C_7H_{13}N$.	128 (775)	0,7837	0,7666 (20,5)	1,4512	39,06	35,799	3,261
Aldimines dérivées d'aldéhydes saturés et de la cyclohexylamine.								
$_3.CH{:}N.C_6H_{11}$	$C_8H_{15}N$.	54 (18)	0,8716	0,8583 (15)	1,4647	40,30	38,684	1,616
$H_3)_2CH.CH{:}N.C_6H_{11}$	$C_{10}H_{19}N$.	82 (26)	0,8516	0,8400 (14)	1,4592	49,89	47,92	1,97
Aldimines dérivées d'aldéhydes saturés et de la benzylamine.								
$_3.(CH_2)_2.CH{:}N.CH_2.C_6H_5$	$C_{11}H_{15}N$.	115 (15)	0,9382	0,9258 (17)	1,5202	52,95	51,137	1,813
$H_3)_2CH.CH{:}N.CH_2.C_6H_5$	$C_{11}H_{15}N$.	105 (15)	0,9288	0,9174 (14)	1,5160	53,08	51,137	1,943

(*) Sans la double liaison C=N.

d. La densité croît quand le poids moléculaire lui-même augmente.

e. Les densités des isomères ne diffèrant entre eux que par la place de la double liaison —C=N— dans la chaîne carbonée, sont voisines, celles des isomères à chaîne ramifiée sont plus faibles.

f. L'exaltation due à la double liaison —C=N— s'accroît quand le poids moléculaire de l'imine augmente.

2° *Dans le cas des aldimines dérivées de la méthylamine*, le point d'ébullition trouvé et la densité observée sont légèrement plus élevés que les grandeurs correspondantes trouvées pour les autres aldimines à même chaîne carbonée dérivées des autres amines, tandis que l'exaltation due à la double liaison —C=N— et la R. m. sont plus faibles.

3° *Chez les aldimines dérivées de la cyclohexylamine et de la benzylamine*, le point d'ébullition croît avec l'augmentation du poids moléculaire, tandis que contrairement à ce qui se passe pour les aldimines purement acycliques, la

densité diminue à mesure que le poids moléculaire augmente, l'exaltation trouvée est supérieure à celle observée pour les autres amines purement acycliques.

CHIMIE ORGANIQUE. — *Mobilité des atomes d'hydrogène, dans le groupement méthylénique du divinylméthane.* Note de MM. **Raymond Paul** et **Serge Tchelitcheff**, présentée par M. Marcel Delépine.

On sait que dans divers carbures tels que le cyclopentadiène, l'indène, le diphénylméthane, etc., l'hydrogène du groupement méthylénique est rendu suffisamment mobile, sous l'influence des doubles liaisons voisines, pour être remplaçable par un atome de sodium ou de potassium. V. Grignard et F. Chambret (1) ont entrevu, d'autre part, *l'acidité* de certains carbures β-diéthyléniques qui présentaient comme le cyclopentadiène la particularité d'avoir un groupe CH_2 compris entre deux liaisons éthyléniques.

Nous nous sommes proposé d'étudier de ce point de vue le plus simple des carbures β-diéthyléniques, le *divinylméthane* $CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH{=}CH_2$ que l'on sait préparer aujourd'hui dans de très bonnes conditions à partir du furfural (2).

En fait, le divinylméthane, au voisinage de son point d'ébullition du moins, ne réagit pratiquement ni sur les organo-magnésiens, ni sur les métaux alcalins, ce qui montre que son groupe CH_2 est moins *actif* que celui du cyclopentadiène. Cependant, lorsqu'on le traite, en milieu benzénique, par la quantité calculée de phénylsodium, il donne naissance à un dérivé monosodé. En ajoutant en effet au produit de la réaction un fort excès de neige carbonique, on obtient avec un rendement de 61 %, un acide diéthylénique de formule brute $C_5H_7.CO_2H$ ($É_6$ 102-103°, D_4^{20} 1,033, N_D^{23} 1,4850, C % 64,8, H % 7,15), que les essais suivants ont montré être l'*hexadiène-3.5-oïque*

$$CH_2{=}CH{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CO_2H.$$

a. Hydrogéné sur nickel Raney (T 15°, P 50^{at}), ce composé fixe exactement deux molécules d'hydrogène en donnant (rendement 86 %) un acide facilement identifié avec l'*acide caproïque*, par ses constantes d'abord ($É_{13}$ 102-103°, D_4^{20} 0,929, N_D^{20} 1,4167) et surtout par les points de fusion de son *amide* (F 100°, N % 12,25) et de son *anilide* (F 97°, N % 7,40).

b. L'absence de double liaison en α par rapport au carboxyle est démontrée par la stabilité de cet acide qui, chauffé avec un peu de cuivre au sein de la quinoléine bouillante, ne perd pas de gaz carbonique, alors que dans les mêmes conditions, son isomère, l'acide sorbique, est rapidement décarboxylé.

---

(1) Voir V. Grignard et L. Lapayre, *Comptes rendus*, 192, 1931, p. 250.

(2) R. Paul et H. Normant, *Bull. Soc. Chim.*, 11, 1944, p. 365.

c. La production de méthanal, par ozonolyse, établit qu'une des liaisons éthyléniques se trouve en bout de chaîne.

d. Enfin, l'existence d'un système diénique est mise en évidence par sa réaction, molécule à molécule, avec l'anhydride maléique. L'hexadiène-oïque nous a donné en effet un adduct, l'*acide (anhydro dicarboxy-1.2 cyclohexène-4 yl-3) acétique* [formule (I)], paillettes blanches fusibles à 153° (C 57,5, H 5,10). Avec l'*hexadiène-3.5 oate d'éthyle* (É$_{11}$ 69-70°, $D_4^{20,5}$ 0,937, N_D^{20} 1,4637) l'anhydride maléique conduit à l'(*anhydrodicarboxy-1.2 cyclohexène-4 yl-3*) *acétate d'éthyle* [formule (II)] fusible à 61° (C 60,75, H 6,15).

(I) : cycle HC=CH, CH—CO, CH—CO (>O), CH₂ ; substituant CH—CH₂—CO₂H

$$\text{(I)}\quad \text{CH—CH}_2\text{—CO}_2\text{H}$$

(II) : cycle HC=CH, CH—CO, CH—CO (>O), CH₂ ; substituant CH—CH₂—CO₂C₂H₅

$$\text{(II)}\quad \text{CH—CH}_2\text{—CO}_2\text{C}_2\text{H}_5$$

La formation d'hexadiène-3.5 oïque, au lieu de l'acide divinylacétique qu'on pouvait attendre, montre donc que la sodation du divinylméthane, ou bien la fixation de CO_2 sur son dérivé sodé, s'accompagne d'une *migration allylique* :

$$CH_2{=}CH{-}CH_2{-}CH{=}CH_2 \xrightarrow{C_6H_5Na} CH_2{=}CH{-}\overline{C}H{-}\overset{+}{C}H{-}\overline{C}H_2 \;\; Na^+$$

$$\xrightarrow{CO_2} CH_2{=}CH{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CO_2Na$$

On pouvait supposer que le premier temps de la réaction était l'isomérisation du divinylméthane en pipérylène, $CH_2{=}CH{-}CH{=}CH{-}CH_3$, dont le CH_3 terminal se serait prêté à la sodation et à la carboxylation ultérieure. Cette hypothèse ne peut être retenue, car en traitant le pipérylène dans les conditions précédentes, nous n'avons pas obtenu d'hexadiénoïque, mais seulement des acides à haut poids moléculaire.

Nous avons étudié également la condensation du bromure d'allyle avec le divinylméthane monosodé. Il se forme un carbure que, par analogie avec ce qui précède, nous considérons provisoirement comme l'*octatriène-1.3.7* (É 119-121°, D_4^{18} 0,763, N_D^{18} 1,4636, C % 88,1, H % 11,6) :

$$CH_2{=}CH{-}CH{=}CH{-}CH_2{-}CH_2{-}CH{=}CH_2.$$

Ce carbure, qui nous a donné deux *hexabromooctanes* (F 106° et F 170°) et qui réagit quantitativement sur l'anhydride maléique, conduit en effet par hydrogénation à l'*octane normal* (É 125°, $D_4^{19,5}$ 0,709, $N_D^{19,5}$ 1,4003). L'alcoylation s'est donc encore accompagnée d'une transposition allylique, dont la généralité et le mécanisme ont été si bien mis en lumière par Ch. Prévost.

EMBRYOLOGIE VÉGÉTALE. — *L'albumen vrai chez les Centrospermées du type chénopodique.* Note (¹) de M. **Roger Dambroise**, présentée par M. René Souèges.

A. Meunier, en 1890 (²), se basant sur les épaississements et les ornementations des cellules de l'assise périphérique du tégument externe ovulaire, a distingué, chez les Centrospermées, un *type chénopodique* et un *type caryophyllique*. Ce sont surtout les familles se rattachant à ce dernier type que Th. Rocén (³) a envisagées dans son très important Mémoire sur l'embryologie des Centrospermées. Mes investigations ont porté sur les groupes apparentés au type chénopodique : Chénopodiacées, Amarantacées, Phytolaccacées, Basellacées, Nyctaginacées et Illécébracées. Elles ont presque exclusivement trait au développement de l'albumen.

Chez toutes ces plantes, l'albumen est transitoire; il n'en subsiste, dans la graine, qu'une faible portion revêtant la radicule à la façon d'un doigt de gant. Les détails relatifs à l'évolution de l'albumen, en raison même du caractère transitoire de ce tissu, sont restés jusqu'ici assez mal connus.

Le fait fondamental qui se dégage de nos observations est la *grande homogénéité* des règles qui président au développement de l'albumen chez les Centrospermées. Pour se faire une idée précise des particularités que présente ce développement, il convient de le partager en deux périodes : une période de construction et une période de résorption. Dans la première, on assiste à la formation normale d'un albumen nucléaire; dans la deuxième, toute construction s'arrête pour faire place à des processus de destruction auxquels résiste dans tous les cas une simple gaine radiculaire. Trois groupes de noyaux d'albumen ont été envisagés : un groupe micropylaire, un groupe pariétal et un groupe chalazien; leur comportement, aux divers stades de la période de résorption surtout, offre des différences qui ont pu être aisément dégagées.

Dans la région micropylaire, le protoplasme affecte d'abord la forme d'un *syncytium réticulé*, les noyaux occupant les nœuds du réseau, et la trame étant représentée par des trabécules plasmatiques amincies; des vacuoles de dimensions variables occupent les mailles du réseau. C'est à cette forme du contenu du sac que se rapporte la construction dite *alvéolaire;* c'est cette même forme qui a reçu également le nom de *tissu spongieux*.

Les noyaux d'albumen de la partie centrale du sac, après multiplication par mitoses, se trouvent vite séparés par une ou quelques rares vacuoles et repoussés contre les parois où ils se répartissent, de manière équidistante, dans une couche de plasma. Les couches pariétales, externe et interne, qu'ils forment de la sorte, semblent exercer un double rôle : un rôle de transport ou de régulation de transport des matériaux arrivant par le chalaze et un rôle de sécrétion qui ressort nettement du fait que, dans certains cas, ces couches

(¹) Séance du 9 avril 1947.

(²) *La Cellule*, 6, 1890, p. 299.

(³) *Zur Embryologie der Centrospermen.* (*In Diss.*, Uppsala, 1927).

pariétales se transforment en une véritable assise cellulaire rappelant l'assise digestive différenciée aux dépens de la portion extérieure de l'albumen chez la plupart des graines albuminées.

Le groupe chalazien engendre un véritable haustorium qui préside surtout à la digestion de la base du nucelle et qui peut être comparé aux haustoriums de même origine que l'on rencontre chez beaucoup d'autres plantes, notamment chez les Gamopétales.

Chez les Centrospermées que j'ai examinées et qui appartiennent à la sous-classe des Apétales, il n'a pu être observé de ces diverticules latéraux rappelant ceux que Rocén a décrits chez les Caryophyllacées. Seul le *Scleranthus perennis* possède, au voisinage de la chalaze, un renflement latéral qui devient central au cours du développement de la graine et qui, sous certains rapports, peut être comparé aux diverticules signalés par Rocén.

L'albumen vrai des Centrospermées offre certainement dans son évolution des différences nombreuses et variées, mais ce ne sont que des différences de degré ne permettant pas de faire des catégories ou de définir des types bien tranchés. Ces variations plus ou moins profondes peuvent être rapportées à la différence de longueur des deux périodes de construction et de résorption, et aussi aux proportions plus ou moins étendues de tissu simplement syncytial, de tissu spongieux et de tissu nettement cellulaire qui se constituent dans les trois régions, micropylaire, pariétale ou chalazienne, du sac.

La portion d'albumen qui persiste dans la graine adulte sous forme d'une gaine radiculaire, se rencontre d'une manière constante et doit être considérée comme une partie constitutive normale de la graine des Centrospermées. Elle présente, avec les espèces, des différences nombreuses qui tiennent : à sa structure (ses cellules généralement disposées en une seule assise comme chez les *Amarantus* pouvant parfois former des massifs plus ou moins épais comme chez les *Corrigiola*), à son étendue plus ou moins grande (ex. *Rivina*, *Mirabilis*), à la surface variable de la partie hypocotylée de l'embryon qu'elle recouvre (ex. *Rivina*, *Basella*), à sa configuration générale surtout, ses bords offrant des parties saillantes et des parties rentrantes diversement orientées (ex. *Beta*, *Amarantus*, *Corrigiola*).

Toutes ces données peuvent certainement servir à préciser les caractères morphologiques des Centrospermées. Mais de nouvelles observations sont encore nécessaires si l'on veut que ces données puissent intervenir utilement pour déterminer les vrais rapports qu'offre cette vaste alliance avec d'autres groupements plus étroits ou de valeur taxinomique comparable (¹).

(¹) On consultera pour plus de détails un gros Mémoire de 100 pages, orné de 306 figures, qui doit paraître prochainement sur le même sujet : R. Dambroise, *Thèse Doct. Univ.* (*Pharmacie*), Paris, 1947.

CYTOLOGIE. — *Sur une couche lipidique périnucléaire des histiocytes et sa structure inframicroscopique.* Note (¹) de M. **Charles-Albert Baud.**

Dans les coupes de pièces traitées par l'acide osmique pour la mise en évidence de l'appareil de Golgi, on constate l'existence, autour du noyau des histiocytes, d'une couche périnucléaire imprégnée en noir intense comme l'appareil réticulaire interne lui-même. Comme on a décrit récemment (²) une couche lipidique périnucléaire dans certaines cellules telles que les spermatocytes d'Escargot, et comme d'autre part le noircissement par l'acide osmique n'est pas la preuve suffisante d'une nature lipidique, nous avons cherché à retrouver cette couche périnucléaire par d'autres méthodes, de façon à préciser sa nature chimique et sa structure inframicroscopique.

Nos recherches ont porté sur le tissu conjonctif du derme cutané de Cobaye et de Lapin nouveau-né, qui est très riche en histiocytes.

Pour l'étude cytochimique, des fragments de peau ont été fixés au formol à 10 % pendant 24 heures, et coupés après congélation. Les coupes ont été traitées par les diverses méthodes de caractérisation cytochimique des lipides. Parmi les colorants généraux des graisses, le Soudan III, l'Écarlate R et le Bleu BZL ont donné des résultats négatifs en ce qui concerne la couche périnucléaire, car la coloration qu'ils produisent n'est pas suffisamment intense pour être décelable sous une aussi faible épaisseur; mais le Noir Soudane B montre une couche périnucléaire très mince, teinte en bleu noir, qui est visible non seulement sur le bord, mais aussi sur les faces du noyau; cela prouve indiscutablement la présence de graisses à ce niveau.

Pour essayer de préciser la catégorie à laquelle appartiennent ces lipides, nous avons utilisé diverses méthodes; en général les résultats obtenus furent négatifs. Cela n'est pas étonnant, car la coloration produite par ces réactions est en général assez faible, et ne peut être perçue dans une couche très mince. C'est ainsi que les réactions de Schultze et de Romieu, spécifiques du cholestérol et de ses esters, se sont montrées négatives, sans qu'il soit cependant permis de conclure à l'absence de ces substances dans la couche mince périnucléaire. Parmi les réactions des lipoïdes, c'est-à-dire des lipides complexes, phospho ou galactolipides, la réaction de Smith-Dietrich s'est montrée légèrement positive, donc en faveur de l'existence de lipoïdes dans cette couche.

Très instructives sont les observations en lumière polarisée. Nous avons utilisé pour cela des fragments de tissu conjonctif frais obtenus en faisant des boules d'œdème de Ranvier avec du liquide de Locke. Dans la plupart des cas, on a ajouté à la solution saline une faible quantité de chrysoïdine pour obtenir la coloration vitale des graisses. Un fragment de la boule d'œdème était placé

(¹) Séance du 31 mars 1947.

(²) L. Monné, *Z. Zell.*, **31**, 1941, p. 91, et *Ark. Zool.*, **34** B, n° **2**, 1942, p. 1.

dans la chambre humide et porté sous le microscope polarisant. Particulièrement après coloration vitale à la chrysoïdine, on constate que la couche lipidique périnucléaire est biréfringente et montre une croix de polarisation. La chrysoïdine colore immédiatement la couche lipidique périnucléaire et augmente considérablement sa biréfringence; on ne sait pas encore par quel mécanisme la chrysoïdine augmente la biréfringence des lipides, en particulier si elle provoque un changement d'état physique de ceux-ci en les rapprochant de l'état de gel comme le pense Monné (*loc. cit.*), ou si elle s'interpose avec une orientation déterminée comme le sulfure d'antimoine dans la méthode que nous avons précédemment décrite ([3]). Ce qui est certain, c'est qu'elle permet la détection d'une biréfringence de la couche lipidique périnucléaire et son étude optique. La détermination du signe de la biréfringence à l'aide des compensateurs montre qu'elle est positive par rapport au rayon du noyau. Il s'agit donc d'une structure sphéritique positive, montrant que les molécules de lipides ne sont pas disposées de façon quelconque, mais orientées avec régularité perpendiculairement à la surface du noyau.

En résumé, nous avons mis en évidence, dans les histiocytes du derme, une couche périnucléaire de lipides, dont les molécules sont nettement orientées perpendiculairement à la surface du noyau.

PHYSIOLOGIE. — *Phénomènes de synergie et d'antagonisme entre l'adrénaline et certaines vitamines.* Note ([1]) de MM. **Raoul Lecoq**, **Paul Chauchard** et Mme **Henriette Mazoué**, présentée par M. Emmanuel Leclainche.

Quand on soumet un rat à des injections d'adrénaline (1 à 5 gouttes du soluté officinal au millième) répétées chaque jour, on obtient dès le 4e jour ou le 5e jour, une augmentation des chronaxies nerveuses qui se maintient en permanence. Indice d'un état dépressif des centres nerveux encéphaliques, ces perturbations sont en rapport probable avec l'action hyperglycémiante de l'hormone, ainsi que le prouve l'antagonisme précédemment noté, par deux d'entre nous, entre cet effet de l'adrénaline et l'action excitante de la caféine ([2]). Nous avons pensé qu'il y avait là une méthode susceptible d'être généralisée et de fournir des renseignements intéressants, en ce qui regarde notamment l'influence de diverses vitamines sur les effets de l'adrénaline. Déjà, la méthode chronaximétrique est apparue précieuse dans l'étude des antagonismes de quelques vitamines vis-à-vis d'une autre hormone, la thyroxine ([3]).

([3]) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 1408.

([1]) Séance du 9 avril 1947.

([2]) P. Chauchard et H. Mazoué, *C. R. Soc. Biol.*, 139, 1945, p. 594.

([3]) G. Mouriquand, J. Coisnard et V. Edel, *C. R. Soc. Biol.*, 138, 1944, p. 552; P. Chauchard et H. Mazoué, *C. R. Soc. Biol.*, 139, 1945, p. 640; R. Lecoq, P. Chauchard et H. Mazoué, *Rev. Pathol. comp. et Hyg. gén.*, 46, 1946, p. 554.

Soit à titre préventif, soit à titre curatif, nous avons donc injecté à des rats recevant comme ci-dessus des injections d'adrénaline (le tout par voie sous-cutanée et en injections séparées) de la vitamine A (axérophtol $12^{\gamma},5$), de la vitamine K (2-méthyl-1.4 naphtoquinone 100^{γ}), de la vitamine C (acide ascorbique 250^{γ}), de la vitamine P (épicatéchine 500^{γ}) ou de la vitamine B_6 ou G (pyridoxine 50^{γ}).

Seules se sont révélées antagonistes de l'adrénaline, c'est-à-dire susceptibles de supprimer ou d'empêcher les variations adrénaliniques des chronaxies nerveuses : la vitamine A, la vitamine K et la vitamine B_6 (ou G). Au contraire, la vitamine P et la vitamine C ont accentué les troubles chronaxiques, les rendant un peu plus précoces et accroissant leur amplitude.

Nous retrouvons ainsi, à l'aide du test chronaximétrique, et vis-à-vis de l'action nerveuse de l'adrénaline, le pouvoir protecteur de la vitamine P, signalé déjà par Parrot et Lavollay ([4]), et celui de la vitamine C, antérieurement observé par Kreitmair et G et A. Ungar ([5]) en ce qui concerne l'activité vasculaire de l'adrénaline. Ce pouvoir paraît être en rapport avec les propriétés réductrices desdites vitamines; depuis les expériences de Bacq, l'exagération des effets de l'adrénaline par les antioxygènes et en particulier par les phénols est en effet bien connue ([6]).

En ce qui concerne l'antagonisme que nous avons constaté entre l'adrénaline et les vitamines A et K, tout porte à croire qu'il s'agit ici de phénomènes inverses et qui s'annulent. Nos observations se trouvent par ailleurs en accord avec l'action hypotensive de la vitamine A et de la vitamine K, mise en évidence par Bruel et Lecoq ([7]), dans le traitement de l'hypertension artérielle; l'importance de la première l'emportant toutefois en clinique sur celle de la seconde. Sans préjudice de l'intervention possible d'autres processus, il est vraisemblable que l'entrave à l'action de l'adrénaline apportée par ces vitamines joue un rôle dans leur utilisation en thérapeutique vasculaire. Il est intéressant de souligner que l'introduction d'antiseptiques phénoliques dans certaines préparations commerciales de vitamine A suffit à empêcher l'activité hypotensive de celle-ci, ces dérivés ayant une action inverse de la vitamine.

Les effets analogues qui ont été observés avec la vitamine B_6 (ou G) appellent quelques explications. La présence de cette vitamine (pyridoxine ou adermine) se montre indispensable pour prévenir ou guérir les troubles chronaxiques dus

---

([4]) *C. R. Soc. Biol.*, **138**, 1944, p. 82.

([5]) H. Kreitmair, *Arch. exp. Pathol. Pharm.*, **176**, 1934, p. 326; G. et A. Ungar, *C. R. XIIe Réun. Ass. Physiol.*, Louvain, 1938, p. 344.

([6]) *Arch. intern. Physiol.*, **42**, 1936, p. 340.

([7]) *Presse méd.*, **54**, 1946, p. 542; *Gaz. méd. France*, **53**, 1946, p. 467; *Concours méd.*, **69**, 1947, p. 546; *Gaz. méd. France*, **54**, 1947, p. 42.

à un excès de tyrosine dans le régime ou à des injections répétées de cet amino-acide ([8]). Étant donnés les rapports chimiques étroits qui existent entre la tyrosine et l'adrénaline, il n'est pas surprenant que la vitamine B_6 se révèle également active dans les deux cas.

Conclusions. — Poursuivie sur le Rat blanc, l'analyse chronaximétrique des effets nerveux de l'adrénaline confirme l'action synergique de l'acide ascorbique et de l'épicatéchine (vitamines C et P).

Elle montre, par contre, l'action antagoniste qu'exercent les vitamines A, K et B 6 (ou G) vis-à-vis de l'adrénaline.

Les résultats expérimentaux concernant les vitamines A et K expliquent, au moins pour une part, l'efficacité thérapeutique de ces vitamines préconisées par Lecoq et Bruel, en injections intramusculaires, dans le traitement de l'hypertension artérielle.

ENTOMOLOGIE. — *Le labium des Thysanoures.*

Note de M. **Jean Chaudonneret**, transmise par M. Louis Fage.

L'interprétation du labium des Insectes a déjà retenu l'attention de nombreux auteurs. Malheureusement, faute de données suffisamment précises, aucun n'a pu, jusqu'à présent, résoudre complètement les problèmes que pose cette pièce buccale. Nous avons cherché à interpréter le labium (squelette et musculature) de *Machilis annulicornis* (Latr.) et de *Thermobia domestica* (Pack.) par reconstitutions d'après des coupes sériées.

L'aspect du labium de *Machilis* est fort différent de celui de *Thermobia* : très allongé chez celui-là, très élargi chez celui-ci ; le premier montrant huit lobes, le second quatre seulement. Pourtant, leur morphologie est identique. Tout d'abord, on reconnaît chez l'un et l'autre les grands sclérites habituels dont la musculature démontre l'homologie : un postmentum impair, un prémentum plus ou moins cloisonné sagittalement, indiquant déjà son origine paire, dont chaque moitié porte un palpe et des lobes. A ces sclérites, visibles ventralement, il faut en ajouter un autre, situé dorsalement, immédiatement sous l'orifice salivaire : la plaque infra-salivaire. Ni l'étude du squelette ni celle de la musculature ne permet de reconnaître un palpiger.

Le labium des Insectes est formé par la soudure dans le plan sagittal de deux appendices typiques. L'étude de la musculature permet de retrouver, tout au moins chez les Thysanoures, les territoires appartenant au subcoxa (postmen-

([8]) R. Lecoq, P. Chauchard et H. Mazoué, *C. R. Soc. Biol.*, séance du 8 mars 1947 et *Observations inédites*.

tum) aux coxæ 1 et 2 (prémentum et lobes) et au télopodite (palpe). La plaque infrasalivaire mentionnée ci-dessus est à rapporter au premier coxa.

Contrairement à ce que pensent plusieurs auteurs, le sternite du métamère labial ne prend pas part à la formation du postmentum ; les restes de ce sternite doivent être recherchés sur la face dorsale du labium, au niveau de son insertion sur la tête et en avant du tentorium, ainsi que sur la face ventrale de l'hypopharynx jusqu'aux fulcres inclusivement.

La limite morphologique subcoxo-coxale est matérialisée ventralement par la *suture* prémento-postmentale. La limite morphologique entre les coxæ 1 et 2 d'un même côté est indiquée anatomiquement, chez *Machilis*, par un fort apodème issu de la face labiale dorsale; sur cet apodème intercoxal s'insère presque toute la musculature motrice du palpe. Chez *Thermobia*, on ne rencontre pas une telle formation, mais la limite intercoxale est soulignée ventralement par une profonde échancrure dans le sclérite prémental, issue du bord latéral, au niveau de l'insertion du palpe; le premier coxa porte le lobe interne et le second le lobe externe. Chacun de ces lobes est divisé en deux chez *Machilis* où les deux lobes externes d'un même côté prennent appui, chez celui-ci, sur un sclérite latéro-prémental qui ne représente pas tout le second coxa.

Le palpe labial de *Machilis* s'articule sur le second coxa; mais, chez *Thermobia*, le condyle articulaire est porté par le bord latéro-antérieur du premier coxa. Nous voyons là une modification secondaire qui ne nous étonne pas outre mesure, car le prémentum du Lépisme nous semble beaucoup moins primitif que celui de *Machilis* : chez celui-là, on ne retrouve plus l'apodème intercoxal (qui correspond évidemment à une condition primitive), et les rapports entre les constituants du prémentum sont modifiés, le deuxième coxa étant très étendu ventralement, refoulant le premier vers le haut avec son lobe. Chez *Machilis*, les rapports sont encore simples entre les divers constituants du prémentum.

Si nous pouvons considérer le prémentum de *Machilis* comme plus primitif que celui du Lépisme, c'est le contraire pour le reste du métamère labial. Il existe en effet chez *Thermobia* des muscles labiaux tergo-appendiculaires et des sterno-appendiculaires antérieurs (fulcraux), et même un muscle tergo-sternal qui manquent tout à fait chez *Machilis*, bien qu'il s'agisse de muscles primitifs.

Malgré ce que nous venons de dire, on trouve, à la fois chez *Machilis* et *Thermobia*, aussi bien dans les régions prémentale que postmentale, des muscles en voie de régression, prenant un aspect tendineux ou même tonofibrillaire. De plus, dans la région postmentale de *Thermobia*, on trouve un muscle tentorio-glandulaire présentant une condition plus évoluée que chez *Machilis*, en se fusionnant partiellement à un sterno-subcoxal de façon à former un sphincter fermant distalement le labyrinthe du rein labial.

Aussi, même à ne considérer que le labium, on trouve, chez *Machilis* et *Thermobia*, un mélange intime de caractères primitifs et de caractères évolués. On a l'habitude de penser que les Machilidiens sont plus primitifs que les Lépismides; c'est peut-être vrai en gros, mais, comme nous le montre ce qui précède, ce n'est pas vrai pour tout, bien au contraire. Pour ne nous en tenir qu'au labium, objet de cette Note, on peut dire que cette pièce a évolué dans deux directions différentes chez les Thysanoures : nous sommes en présence, si l'on peut dire, de deux réalisations différentes d'un même thème, d'une même *idée*.

La séance est levée à $15^{h}45^{m}$.

L. B.

ERRATA.

(Séance du 14 octobre 1946.)

Note de MM. *Fernand Gallais* et *J. Mounier*, Nature et stabilité des complexes coexistant dans les solutions aqueuses de mercure-II-thiocyanates :

Page 791, 21ᵉ ligne, *au lieu de*

$$(\mathrm{SNC})^- = x - [3y + 4(1-y)] = x + y' - 4;$$

lire

$$(\mathrm{SNC})^- = \Gamma''_x - \Gamma(1-x)[3y + 4(1-y)] = \Gamma'_x + \Gamma(1-x)(y-4),$$

et 23ᵉ ligne, *au lieu de*

$$K_2 = K_1 \cdot \frac{y}{1-y} \cdot (x + y - 4),$$

lire

$$K_2 = K_1 \frac{y}{1-y}[\Gamma'_x + \Gamma(1-x)(y-4)].$$

(Séance du 3 mars 1947.)

Note de M. *Georges Carpéni*, Influence des sels neutres sur les courbes de titrage de l'acide molybdique :

Page, 927, 6ᵉ ligne, *au lieu de* (Mo_2O_7Me, *lire* ($Mo_2O_7HM_2$.